

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za elektrotehniko

## Adaptivna obdelava signalov

Sašo Tomažič, Anton Umek  
gradivo v pripravi

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>5</b>
1.1	Kaj razumemo pod adaptivno obdelavo signalov . . . . .	5
1.2	Osnovne lastnosti adaptivnih sistemov . . . . .	5
1.3	Uveljavljanje adaptivnih sistemov v telekomunikacijah . . . . .	6
1.4	Vrste adaptivnih sistemov za obdelavo signalov . . . . .	7
1.5	Primeri uporabe adaptivnih sistemov . . . . .	7
1.5.1	Izravnalnik . . . . .	7
1.5.2	Izločevalnik odbojev . . . . .	8
1.5.3	Izločanje šuma . . . . .	9
1.5.4	Antenska polja . . . . .	9
1.5.5	Predikcija govora . . . . .	10
1.6	Razredi adaptivnih sistemov . . . . .	11
1.6.1	Sistem za identifikacijo neznanega sistema . . . . .	11
1.6.2	Sistemi za tvorjenje približka signalu . . . . .	12
1.6.3	Sistemi za popravljanje signala . . . . .	13
1.7	Izhodišča pri načrtovanju adaptivnih sistemov . . . . .	14
1.7.1	Vnaprejšnje poznavanje . . . . .	14
1.7.2	Kriterij kvalitete . . . . .	15
1.8	Adaptacijski algoritem . . . . .	16
1.8.1	Enota za obdelavo signala . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Adaptiven sistem z eno utežjo</b>	<b>19</b>
2.1	Časovno diskreten signal . . . . .	19

---

2.2	Kriterijska funkcija . . . . .	20
2.2.1	Srednja kvadratična vrednost . . . . .	21
2.3	Šum v referenčnem signalu . . . . .	25
2.4	Dekorelacija signala napake . . . . .	27
2.5	Iskanje na osnovi gradienta . . . . .	27
2.5.1	Gradient kriterijske funkcije . . . . .	28
2.5.2	Rekurzivno popravljanje uteži . . . . .	28
2.5.3	Konvergenca postopka . . . . .	30
2.5.4	Krivulja učenja . . . . .	32
2.5.5	Izračun gradienta . . . . .	33
2.5.6	Napaka pri merjenju gradienta . . . . .	35
2.5.7	Varianca kvadratične vrednosti napake . . . . .	37
2.5.8	Presežek srednje kvadratične vrednosti napake . . . . .	40
2.6	LMS algoritem . . . . .	44
2.6.1	Analiza LMS algoritma . . . . .	46
2.6.2	Napaka pri izračunu gradienta in presežek srednje kvadratične napake . . . . .	48
2.7	Predznačni algoritem . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Adaptivno transverzalno sito</b>	<b>53</b>
3.1	Transverzalno sito . . . . .	53
3.1.1	Odziv transverzalnega sita na enotin impulz . . . . .	54
3.1.2	Prevajalna funkcija transverzalnega sita . . . . .	55
3.1.3	Vektorski zapis . . . . .	57
3.1.4	Kriterijska funkcija . . . . .	58
3.2	Gradientni postopki . . . . .	64
3.2.1	Spust po največji strmini . . . . .	64
3.2.2	Newtonov postopek . . . . .	66
3.2.3	Izračun gradienta in inverzne avtokorelacijske matrike . . . . .	68
3.3	Večdimenzionalni LMS algoritem . . . . .	68

3.3.1	Krivulja učenja , hitrost adaptacije in presežek napake . . . . .	69
3.3.2	Implementacija LMS adaptivnega sita . . . . .	70
3.3.3	Normalizirani LMS algoritem . . . . .	71
3.4	RLS algoritem . . . . .	72
3.4.1	Minimizacija kriterijske funkcije . . . . .	72
3.4.2	Rekurzivno računanje uteži . . . . .	73
3.5	Primerjava algoritmov . . . . .	76
3.6	Druge strukture adaptivnega sita . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Primeri uporabe adaptivne obdelave signalov v telekomunikacijah</b>	<b>78</b>
4.1	Adaptivno izločanje odmeva . . . . .	78
4.1.1	Izločanje odboja pri dvosmernem dvožičnem digitalnem prenosu	80
4.2	Adaptivna izravnava prevajalne karakteristike kanala . . . . .	83

# 1 Uvod

## 1.1 Kaj razumemo pod adaptivno obdelavo signalov

Pod adaptivno obdelavo signalov razumemo preoblikovanje signalov s pomočjo adaptivnega sistema. V splošnem govorimo o adaptivnem ali prilagodljivem sistemu takrat, kadar se je ta sposoben sam prilagajati specifičnim okoliščinam svojega delovanja. Prilagodljivost je lastnost, ki jo običajno pripisujemo živim organizmom, to je značilna sposobnost živih organizmov, da se prilagajajo svojemu okolju, v krajšem ali daljšem (evolucijskem) časovnem razdobju.

Ravno tako kot pri živih bitjih, je lahko prilagodljivost koristna pri umetno narejenih sistemih, to je sistemih, ki jih načrtuje človek za zadovoljevanje svojih potreb. Adaptivni sistemi so potrebni predvsem:

- kadar načrtovalec ne pozna pogojev delovanja sistema že v času načrtovanja,
- kadar mora isti sistem delovati v različnih okoljih in
- kadar se pogoji delovanja med samim delovanjem spreminjajo.

Preprost primer adaptivnega sistema s področja telekomunikacij je avtomatska nastavitev ojačenja (AGC – avtomatic gain control), ki se uporablja v radijskih in televizijskih sprejemnikih. Ojačenje je tu obratno sorazmerno jakosti sprejetega signala, kar zagotavlja bolj konstanten nivo signala na izhodu AGC.

## 1.2 Osnovne lastnosti adaptivnih sistemov

Bistvena lastnost vseh adaptivnih sistemov je, da so časovno spremenljivi in samo nastavljivi. V splošnem imajo adaptivni sistemi za obdelavo signalov nekatere ali vse od

naslednjih lastnosti:

1. V spremenljivem okolju so se sposobni avtomatsko prilagajati novim zahtevam, tako da izboljšujejo svoje delovanje.
2. Možno jih je 'naučiti' opravljanja določene naloge.
3. Ker se sami prilagajajo je lahko njihovo načrtovanje manj zahtevno, kot pri neadaptivnih sistemih. Lahko bi rekli, da imajo lastnost samonačrtovanja.
4. Sposobni so ekstrapolirati model svojega delovanja na osnovi učenja na končnem in omejenem številu primerov.
5. V omejenem obsegu so sposobni odpravljanja napak v svojem delovanju.
6. Opišemo jih lahko v splošnem kot nelinearne časovno spremenljive sisteme.
7. V splošnem so bolj zapleteni, analiza njihovega delovanja pa je zahtevnejša kot pri neadaptivnih sistemih, vendar imajo v spremenljivem ali v naprej ne dobro poznanem okolju odločilno prednost v delovanju pred neadaptivnimi sistemi.

### 1.3 Uveljavljanje adaptivnih sistemov v telekomunikacijah

Adaptivna obdelava signalov se je v zadnjih letih zelo hitro uveljavila na področju obdelave signalov v telekomunikacijah.

Razlogi za to so:

- hiter razvoj mikro elektronskih vezij je omogočil izdelavo majhnih zanesljivih in cenениh signalnih procesorjev, kar je povzročilo hitro rast uporabe vseh vrst obdelave signalov, vključno z adaptivno obdelavo signalov,
- razvoj zahtevnih in robustnih adaptivnih algoritmov,
- specifične potrebe telekomunikacij, ki zahtevajo vedno več obdelave signalov.

## 1.4 Vrste adaptivnih sistemov za obdelavo signalov

V osnovi ločimo dva osnovna tipa adaptivnih sistemov:

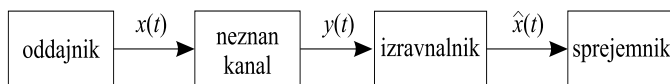
1. sistemi brez povratne vezave in
2. sistemi s povratno vezavo.

Adaptacija sistemov brez povratne vezave sloni na opazovanju parametrov okolice in vhodnega signala. Ti parametri se nato uporabijo pri nastavljanju parametrov adaptivnega sistema po nekem algoritmu na tak način, da se sistem čim bolj prilagodi temu okolju in vhodnemu signalu.

Sistemi s povratno vezavo uporabljajo v algoritmu za nastavljanje svojih parametrov poleg vhodnega signala in parametrov okolice tudi izhodni signal in kriterij kvalitete delovanja.

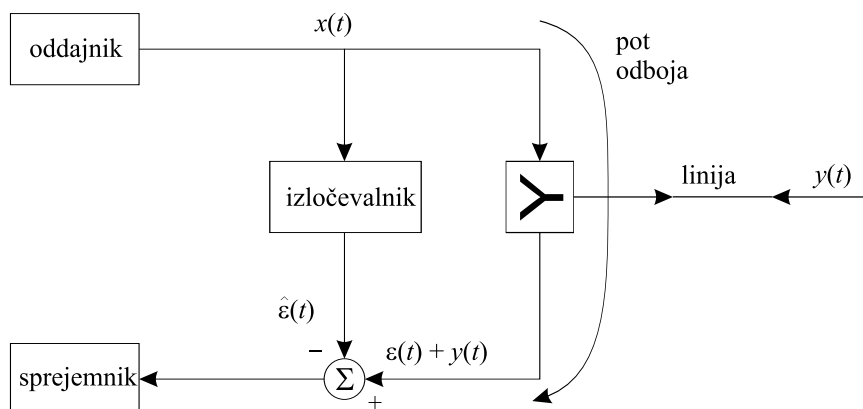
## 1.5 Primeri uporabe adaptivnih sistemov

### 1.5.1 Izravnalnik



Slika 1.1 – Izravnalnik prenosne karakteristike (sl1-1)

Uporaba izravnalnika je shematsko prikazana na sliki 1.1. Pri prenosu preko kanala se signal običajno popači, to je spremeni svojo obliko. Ker želimo, da je sprejeti signal čim bolj podoben oddanemu signalu, vključimo na sprejemni strani izravnalnik, to je sistem, ki ima načeloma inverzno funkcijo kanala, tako, da izravna karakteristiko kanala. Tak sistem lahko načrtujemo le, kadar vnaprej poznamo karakteristiko kanala. Če karakteristike kanala ne poznamo vnaprej, ali pa se ta med delovanjem spreminja, mora imeti tak sistem sposobnost, da se sam prilagodi kanalu in tudi spremlja njegove spremembe. Govorimo o adaptivnem izravnalniku.



Slika 1.2 – Izločevalnik odbojev pri istočasnem dvosmernem prenosu (sl1-2)

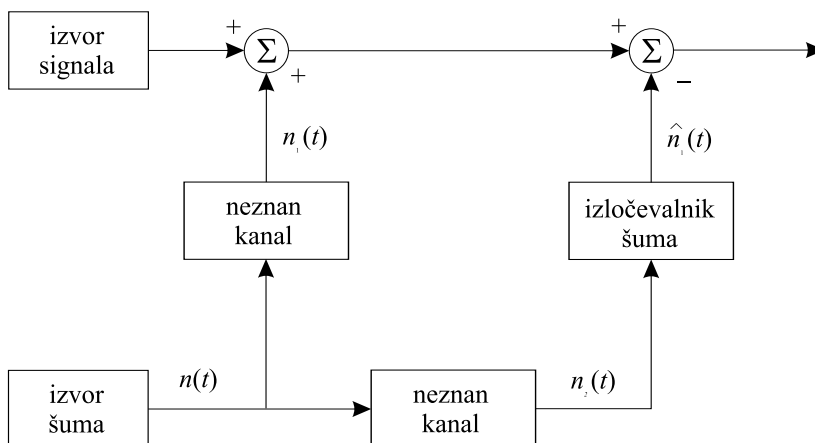
### 1.5.2 Izločevalnik odbojev

Vezava izločevalnika odbojev pri istočasnem dvosmernem prenosu po telefonski liniji je prikazana na sliki 1.2. Pri istočasnem dvosmernem prenosu ne želimo, da bi sprejemnik sprejemal signal, ki ga oddaja oddajnik na isti strani linije – želimo ločiti smeri prenosa. Delno lahko to vlogo upravlja uravnoteženo mostično vezje (vilice), kar običajno zadošča pri prenosu analognega govornega signala, kjer je celo zaželeno, da svoj glas tudi sami slišimo v slušalki. Pri digitalnem prenosu pa preprosto vilično vezje ne zadošča več, zato moramo vključiti med oddajnik in sprejemnik izločevalnik odbojev.

Oddani signal namreč uhaja preko viličnega vezja zaradi nepopolne prilagoditve, obenem pa se odbija od nezveznosti na liniji in od nepopolno prilagojenega sprejemnika na drugi strani linije. Če ima izločevalnik enako karakteristiko kot pot, po kateri se odbija signal, je signal na njegovem izhodu enak odbitemu signalu in ga lahko enostavno odštejemo od sprejetega signala, tako, da pride na sprejemnik le signal, ki ga je oddal oddajnik na nasprotni strani linije.

Ker v času načrtovanja sistema ne poznamo natančno poti odboja, oziroma se ta lahko spreminja med samim delovanjem, moramo izločevalnik sproti prilagajati tem spremembam.





Slika 1.3 – Izločanje šuma (sl1-3)

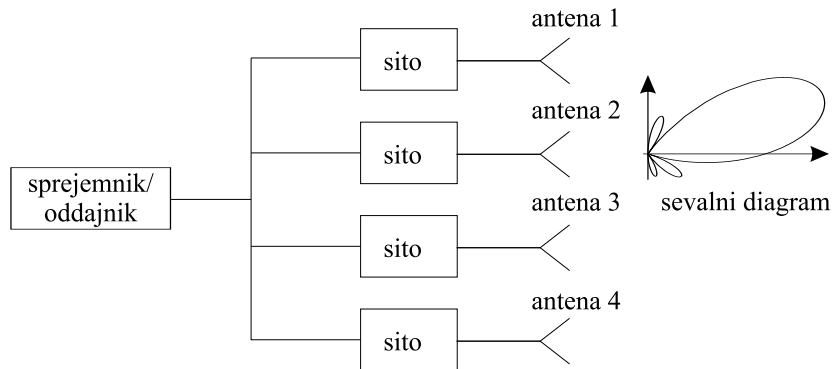
### 1.5.3 Izločanje šuma

Sistem za izločanje šuma je prikazan na sliki 1.3. Tak sistem lahko uporabimo za izločanje hrupa v hrupnem okolju, na primer v avtomobilu, kjer lahko hrup motorja moti voznika. Z ustreznim mikrofonom v bližini motorja lahko zajemamo hrup (šum), ki ga ta povzroča. Ker mikrofona ne moremo postaviti v sam izvor šuma, je ta preoblikovan. Na mikrofону sprejeti signal dodatno preoblikujemo in ga oddajamo s pomočjo enega ali večih zvočnikov, tako, da se ta v bližini voznika odšteva od signala, ki do njega prihaja neposredno od motorja. Na ta način ustvarimo področje tišine v okolici voznika. Ker v času načrtovanja ne vemo natančno, kako se šum preoblikuje na poti od motorja do mikrofona in na poti od mikrofona do voznika, niti kako se preoblikuje na direktni poti od motorja do voznika, mora biti tak sistem adaptiven.

### 1.5.4 Antenska polja

Na sliki 1.4 je prikazan primer antenskega polja v dveh dimenzijah. Antene so lahko sprejemne ali oddajne, lahko pa je to polje mikrofонов ali polje zvočnikov. Isti signal pripeljemo na vse antene, vendar ga med seboj fazno zamaknemo, lahko pa mu spremenjamo tudi amplitudo. Zaradi interference valovanja v prostoru, je od tega odvisen sevalni diagram antenskega polja.

Na ta način lahko anteno usmerimo v neko določeno točko v prostoru (maksimum

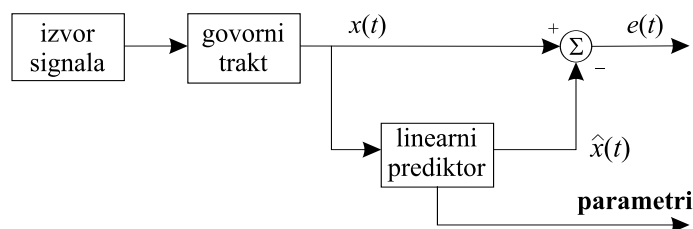


Slika 1.4 – Usmerjanje antenskega polja (sl1-4)

sevalnega diagrama) ali pa določeno točko, ki predstavlja motnjo, izločimo iz sprejema (minimum v sevalnem diagramu). Če položaj teh točk poznamo vnaprej, lahko tudi vnaprej nastavimo ustrezne fazne zamike in ojačenja, če pa ga vnaprej ne poznamo, ali pa se spreminja, moramo ojačenja in fazne zamike sproti spreminjati in prilagajati trenutnemu stanju.

### 1.5.5 Predikcija govora

Pri digitalnem prenosu govornega signala želimo, da bi bilo za kvaliteten prenos potrebno prenašati čim manj podatkov, ker na ta način manj obremenjujemo prenosni kanal. Ker se lastnosti govornega signala spreminjajo relativno počasi, lahko iz preteklih vzorcev govora vnaprej približno predvidimo, kakšen bo ta v nadaljevanju. To lahko naredimo s pomočjo linearnega prediktorja, ki je prikazan na sliki 1.5.



Slika 1.5 – Adaptivni linearni prediktor govornega signala (sl1-5)

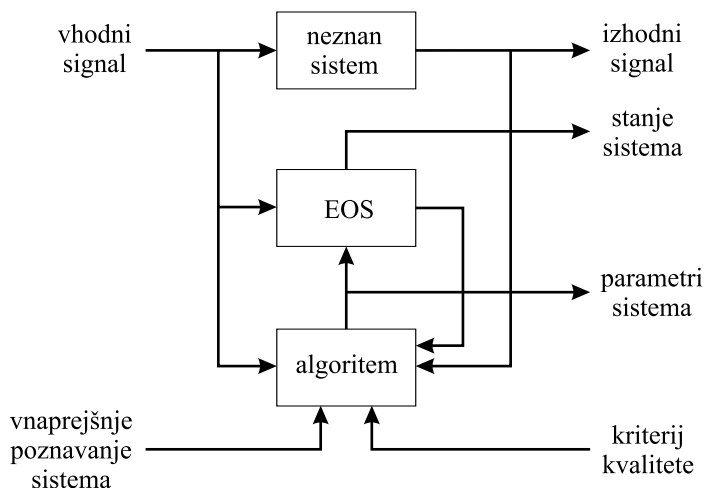
Pri predvidevanju naredimo napako, ki je enaka razliki med predvidenim in dejanskim signalom. Za prenos govornega signala zadošča, da prenesemo le to napako,

saj lahko pri sprejemu izvedemo obraten postopek, to je iz preteklih vzorcev signala predvidimo njegovo nadaljevanje in od tega odštejemo napako, ki jo prenašamo. Za prenos napake potrebujemo manjšo kapaciteto prenosnega kanala, kot bi jo potrebovali za prenos celotnega signala.

Bolj ko je to predvidevanje natančno, manjša je napaka in manjše so potrebe po prenosni kapaciteti kanala. Predvidevanje bi bilo lahko še bolj natančno, če bi poznali osebne značilnosti govorca. Ker se govorce menjajo, lahko se menja tudi njihovo razpoloženje in s tem tudi značilnosti njihovega govora, bomo dosegli boljše rezultate, če se bo sistem sposoben sam sproti prilagajati tem značilnostim.

## 1.6 Razredi adaptivnih sistemov

### 1.6.1 Sistem za identifikacijo neznanega sistema



Slika 1.6 – Sistem za identifikacijo neznanega sistema (sl1-6)

**Cilj** je ugotoviti parametre ali pa stanje nekega, ne v celoti poznane sistema. Zato moramo:

- poznati osnovno strukturo sistema, ki ga želimo identificirati,

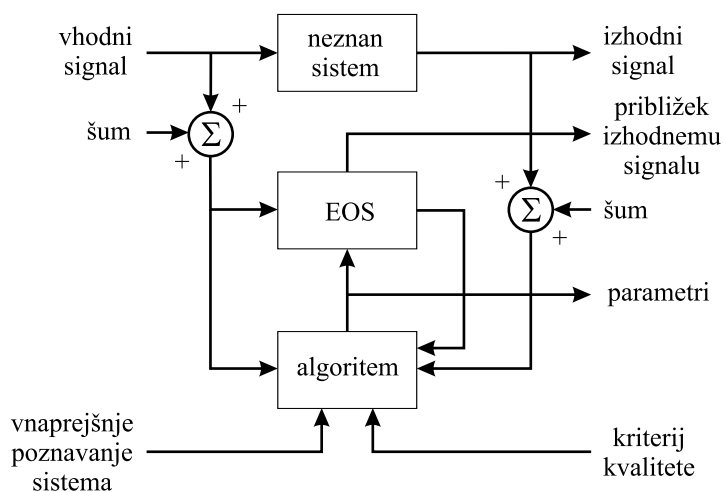
- imeti dostop do vhodnega signala in šuma na vходу (včasih ni potrebno meriti signala, ker ga vnaprej poznamo (npr. harmoničen signal, impulz, ...) in
- dostop do izhodnega signala.

Sistemi za identifikacijo se pogosteje uporabljajo v regulacijski tehniki kot v telekomunikacijah. Uporabljajo se lahko tudi pri načrtovanju filtrov.

Na prvi pogled je sistem za linearno predikcijo govora sistem za identifikacijo, vendar to ni res ker:

- tu nimamo na razpolago vhodnega signala,
- ne zanimajo nas parametri vokalnega trakta temveč, zapis govornega signala v obliki, ki zahteva čim manjši prenos in čimbolj verno reprodukcijo.

### 1.6.2 Sistemi za tvorjenje približka signalu

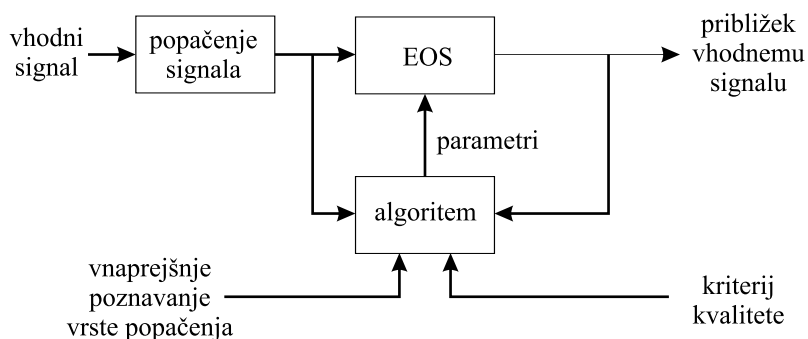


Slika 1.7 – Sistem za tvorjenje približka signalu (sl1-7)

**Cilj** je tvoriti čimbolj veren približek signala, ki je šel skozi nepoznan sistem, na osnovi vhodnega (lahko šumnega) in izhodnega signala.

- Natančno vnaprejšnje poznavanje sistema tu ni potrebno, dovolj je, da poznamo njegove osnovne lastnosti (linearen ali nelinearen, s spominom ali brez, trajanje odziva,...)
- Ni pomembno, da adaptivni sistem po svoji strukturi ustreza neznanemu sistemu, pomembno je le, da je sposoben tvoriti dovolj dober približek signalu. Parametri adaptivnega sistema tako nimajo nujno neposredne zveze s fizikalnimi parametri realnega sistema.
- Predstavniki takega sistema je izločevalnik odbojev. Signal na njegovem izhodu mora biti čim bližje odbitemu signalu. V tem primeru je pot odboja neznan sistem in če predpostavimo, da je ta pot linearna, jo lahko nadomestimo z adaptivnim transverzalnim sistemom.
- Ker gre tu za tvorjenje približka izhodnega signala, lahko predpostavke o naravi vhodnega oziroma izhodnega signala bistveno vplivajo na izvedbo in delovanje takega sistema. Napačna predpostavka lahko povzroči nepredvideno in nepravilno delovanje sistema.

### 1.6.3 Sistemi za popravljanje signala



Slika 1.8 – Sistem za popravljanje signala (sl1-8)

**Cilj** takega sistema je, da na nek način popravi signal tako, da bo imel željeno karakteristiko. Popravljanje signala je lahko potrebno zato, ker je šel signal skozi neznan

sistem, ki je ta signal popačil, vendar vhodni signal ni neposredno na razpolago.

- Za izvedbo moramo zelo dobro poznati naravo signala, ki ga korigiramo.
- Točno moramo poznati vrsto napake, ki jo želimo korigirati.

Izravnalnik je tipičen primer sistema za popravljanje signala.

- Pri analognem prenosu ima nalogo izravnati spekter sprejetega signala, ob predpostavki, da je spekter signala na vhodu sistema bel. Če je ta predpostavka napačna, bo sistem pokvaril signal, ker bo kljub temu, da signal na vhodu neznanega sistema nima belega spektra, težil k temu, da je spekter popravljenega signala bel.
- pri prenosu podatkov je naloga takega sistema izločanje intersimbolne interference v trenutkih odločanja.

Linearna predikcija govornega signala spada prav tako v to kategorijo, čeprav izhod sistema ni korigiran signal, temveč parametri sistema, ki ta signal tvorijo.

## 1.7 Izhodišča pri načrtovanju adaptivnih sistemov

### 1.7.1 Vnaprejšnje poznavanje

Današnji adaptivni sistemi močno slonijo na vnaprejšnem poznavanju tako signalov s katerimi bodo imeli opravka kot okolja v katerem bodo delovali. Brez takega vnaprejšnjega poznavanja bi se moral sistem v celoti prilagajati, kar pomeni:

- tak sistem bi moral prilagajati svojo strukturo okolju, v katerem deluje in signalom, ki jih obdeluje,
- poiskati ustrezen algoritem, ki bi bil prilagojen signalu in
- nastaviti parametre takega sistema.

Tako kompleksna naloga presega stanje današnje tehnologije in zaenkrat tako zmožnost pripisujemo le človeški inteligenci.

Današnji sistemi so zato mnogo preprostejši, prilagojeni so specifičnim vrstam signala in specifičnemu okolju in imajo fiksno, vnaprej določeno strukturo. Edina neznanica v sistemu je vrednost nekega nabora parametrov, ki jih lahko določimo na osnovi meritev signalov.

Pomembno pri vnaprejšnjem poznavanju signalov in sistema, ki ga uporabljamo pri načrtovanju adaptivnega sistema pa je, da lahko napačne predpostavke povzročijo popolnoma zgrešeno delovanje sistema. Pri izločanju motenj je lahko na primer zelo koristna predpostavka, da je motilni signal periodičen, željeni signal pa ne. Če se v praksi izkaže, da ima tudi željeni signal periodične komponente, bo adaptivni sistem, ki temelji na predpostavki periodičnosti motilnega signala, skušal te komponente izločiti.

### 1.7.2 Kriterij kvalitete

Kriterij kvalitete, ki ga izberemo za določen sistem v praksi, je običajno kompromis med našimi željami in tehnično izvedljivostjo ter zahtevnostjo. Kriterij kvalitete je v bistvu pri vsakem sistemu drugačen in ga običajno ni težko izraziti z besedami.

Pri izločanju šuma želimo, da je po izločanju signal brez opaznega popačenja, obenem pa je šum izločen v največji meri. Pri predikciji govora je pomembno, da dosežemo čim večjo kvaliteto in razumljivost govora pri dani prenosni hitrosti.

Vidimo, da v kriteriju kvalitete pogosto nastopajo subjektivna merila in lastnosti človeške zaznave. Pravzaprav nas pri izločanju šuma iz govornega signala ne zanima zares, ali je bil šum v celoti izločen, pomembno je le, da ga mi ne slišimo. Ravno tako nas pri korekciji govornega signala ne zanima, ali je ta signal dejansko enak originalnemu signalu, pomembno je le, da ga mi tako slišimo, predvsem pa je pomembno, da je razumljiv.

Problem je v tem, da subjektivni kriteriji ponavadi niso neposredno merljivi. Potrebno je poiskati merljiv ekvivalent subjektivnega kriterija, kar pa ni vedno mogoče. Zato se najpogosteje uporablja kar kriterij povprečne kvadratične napake. Pri tej izbiri kriterija je pomembno:

- Za ta kriterij je možno enostavno razviti algoritme za njegovo minimizacijo.

- Pri Gaussovem procesu je minimizacija srednje kvadratične napake ekvivalentna maksimizaciji verjetnosti.
- Dejstvo, da je v večini primerov dejanski kriterij zadovoljen, če je povprečna kvadratična napaka pod določeno mejo. Vendar je to zadosten in ne potreben pogoj, kar lahko pomeni, da so naše zahteve lahko večje, kot bi bilo potrebno.
- Majhna odstopanja od optimalne vrednosti običajno ne povzročijo bistvenega poslabšanja v delovanju sistema.

## 1.8 Adaptacijski algoritem

Adaptacijski algoritem je postopek, s katerim iz merjenih vrednosti signala na osnovi kriterija kvalitete izračunamo parametre adaptivnega sistema tako, da čimbolj zadovoljuje kriterij kvalitete.

Kot smo že omenili, sloni večina adaptacijskih algoritmov na kriteriju povprečne kvadratične napake, kar pomeni, da določijo parametre sistema tako, da minimizirajo srednjo kvadratično vrednost signala napake.

Signal napake pridobimo običajno tako, da izhodni signal sistema odštejemo od željenega signala (kadar je ta na razpolago), oziroma od približka željenemu signalu (pri sistemih za popravljanje signala).

V splošnem obstajata dve metodi za doseganje minimuma:

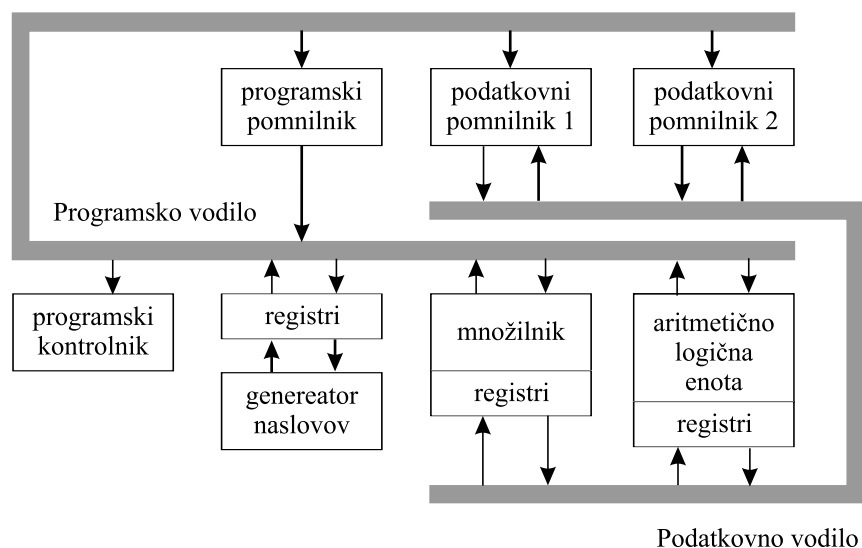
- metoda, pri katerih se optimalna vrednost parametrov določa iz nekega omejenega nabora trenutno razpoložljivih podatkov in
- gradientna metoda, pri kateri sproti spreminjamo parametre v smeri padajoče srednje kvadratične vrednosti napake, to je v smeri nasprotni gradientu napake.

### 1.8.1 Enota za obdelavo signala

Signalni procesor v adaptivnem sistemu je naprava, ki dejansko obdeluje razpoložljivi vhodni signal tako, da dobimo na njenem izhodu približek željenega signala. Kadar gre za linearen sistem imenujemo to tudi adaptivni filter.



Zaradi enostavnejše izvedbe digitalnih vezij je tak filter običajno izveden digitalno, lahko neposredno kot digitalno vezje ali pa programsko s pomočjo digitalnega signalnega procesorja. V zadnjem času imajo prednost predvsem izvedbe z digitalnim signalnim procesorjem, saj njihova računsko moč in hitrost naraščata, obenem pa njihova cena pada. Signalni procesor je v bistvu mikroprocesor, ki pa ima svojo arhitekturo prirejeno potrebam digitalne obdelave signalov. Načelna arhitektura signalnega procesorja je prikazana na sliki 1.9.



Slika 1.9 – Načelna arhitektura signalnega procesorja (sl1-9)

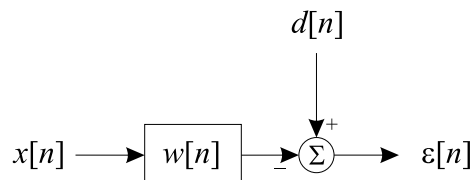
Bistvena značilnost signalnih procesorjev je, da imajo vgrajen paralelni množilnik, ki je sposoben zmnožiti dve števili v enem urinem ciklu. Večina današnjih signalnih procesorjev pa ima možnost izvajanja dveh ali več ukazov v enem ciklu. Običajno je omogočeno branje podatkov, izvedba računsko operacije in shranjevanje rezultata v enem samem urinem ciklu. Da lahko to omogočajo, imajo signalni procesorji ločeno programsko in podatkovno vodilo, ravno tako pa je ločen tudi programski in podatkovni pomnilnik. Slednji je običajno razdeljen še na pomnilnik za vhodne in izhodne podatke. Najnovejši signalni procesorji imajo lahko vgrajenih celo več računskih enot in množilnikov, tako da je mogoče vzporedno izvajanje večjega števila ukazov s pomočjo tako imenovanega nabora zelo dolgih ukazov (VLIW - very large instruction word).

Vse to omogoča izdelavo vedno zahtevnejših adaptivnih sistemov, ki so zasnovani na signalnem procesorju.

Izbira tipa filtra ni neposredno povezana z njegovo izvedbo (strojna ali programska), je pa bistvena za samo načrtovanje filtra. Odločimo se lahko za nerekurzivne ali rekurzivne sisteme in različne strukture izvedbe. Nerekurzivni sistemi imajo to prednost, da so stabilni in imajo samo en minimum, medtem, ko je prednost rekurzivnih sistemov običajno v tem, da je potrebno nastavljati manj parametrov (koeficientov filtra) in je lahko zato tudi čas adaptacije krajši, računska kompleksnost pa manjša.

## 2 Adaptiven sistem z eno utežjo

Kot najpreprostejši zglede enote za obdelavo signalov lahko vzamemo sistem z eno utežjo prikazan na sliki 2.1.



Slika 2.1 – Sistem z eno utežjo (sl2-1)

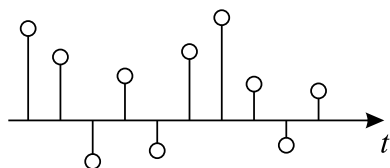
To je sistem, pri katerem signal množimo z enim samim koeficientom (utežjo) in ga želimo s tem čimbolj približati željenemu signalu. Primer takega sistema, ko imamo opraviti z analognimi signali, je avtomatska kontrola ojačenja (AGC-automatic gain control). Ker v nadaljevanju obravnavamo le digitalne sisteme za obdelavo signalov, so signali tu časovno diskretni in predstavljajo zaporedne vzorce analognega signala.

### 2.1 Časovno diskreten signal

Časovno diskreten signal je urejen niz števil. Dobimo ga lahko z vzorčenjem zveznega signala v diskretnih časovnih trenutkih. Običajno vzorčimo v enakomernih časovnih intervalih  $T$ . Časovno diskretne signale lahko generiramo tudi z računalnikom z izvajanjem različnih matematičnih operacij.

Matematično lahko predstavimo časovno diskreten signal kot niz števil  $\{x_n\}$ , signalni vektor  $\mathbf{x} = [x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}]^T$  ali funkcijo indeksa  $x[n]$ . Indeks  $n$  je celo število in predstavlja neodvisno spremenljivko. Kadar predstavlja diskretni signal zaporedne vzorce zveznega signala pri enakomernem vzorčenju, ga lahko zapišemo tudi

kot časovno funkcijo  $x(nT)$ . Grafični prikaz časovno diskretnega signala je na sliki 2.2.



Slika 2.2 – Časovno diskreten signal (sl2-2)

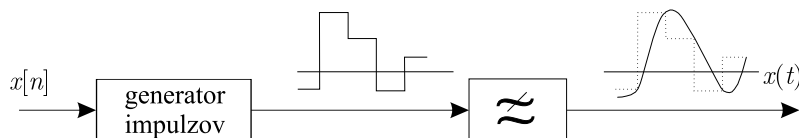
Če želimo, da pri enakomernem vzorčenju časovno diskreten signal verno predstavlja analogen signal, ki smo ga vzorčili, to je, da je iz njega mogoče ponovno rekonstruirati vzorčen signal, moramo pri vzorčenju izpolniti pogoja, ki jih zahteva teorem o vzorčenju. Signal, ki ga vzorčimo mora biti frekvenčno omejen:

$$X(f) = 0 \quad ; \quad |f| < f_m \quad (2.1)$$

kjer je  $f_m$  mejna frekvenca signala, frekvenca vzorčenja pa mora biti vsaj dvakrat tolikšna kot mejna frekvenca:

$$f_{vz} = 1/T_{vz} \geq 2f_m \quad (2.2)$$

Potem je mogoče v skladu s teoremom o vzorčenju rekonstruirati analogni signal, tako da niz ozkih impulzov utežene z vrednostmi posameznih vzorcev peljemo skozi nizko sito z mejno frekvenco  $f_{vz}/2$ , kot je to prikazano na sliki 2.3.



Slika 2.3 – Rekonstrukcija analognega signala (sl2-3)

## 2.2 Kriterijska funkcija

Kriterijska funkcija mora biti izbrana tako, da čimbolj odraža podobnost med signalom na izhodu adaptivnega sistema in referenčnim signalom. Idealno bi bilo, da je signal na izhodu enak referenčnemu signalu. V zvezi s tem pa se pojavita dve vprašanji:

1. Ali je naš sistem sposoben pri danem vhodnem signalu tvoriti na svojem izhodu signal enak referenčnemu signalu.
2. Ali kriterijska funkcija odraža naše želje, in je z nje razvidno, kdaj sta signala enaka, oziroma kako blizu sta signala.

**Primer:**

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \Phi)$$

$$d[n] = B \cos(\Omega n)$$

Če signal  $x[n]$  v primeru množimo s poljubno konstanto  $w[n]$ , ne moremo doseči, da bi bil signal  $y[n]$  enak signalu  $x[n]$ . Za to bi namreč rabili fazni sukelnik in ojačevalnik, naš sistem pa predstavlja samo ojačevalnik. Torej je tu odgovor na prvo vprašanje negativen.

Na zgornjem primeru smo videli, da trenutna vrednost napake ni dober kriterij za popraviljanje uteži sistema, zato moramo sistem opazovati dalj časa in se šele nato odločiti, kako bomo popravili utež.

Kot kriterij kvalitete bi torej lahko namesto trenutne vrednosti napake izbrali njeno povprečno vrednost. Taka izbira pa ne bi bila dobra, ker imajo lahko napake različen predznak. Napake z različnim predznakom se pri računanju povprečja med seboj odštevaajo, tako, da lahko dobimo zelo majhno vrednost povprečne napake, čeprav so posamezne napake zelo velike. Povprečna napaka ur, ki stoji je enaka 0, saj polovico čas prehiteva in polovico časa zaostaja. Če bi jemali za kriterij kvalitete povprečno napako, bi bila torej ura, ki stoji boljša od ure, ki prehiteva za eno sekundo, saj ima prva povpečno napako 0 druga pa 1s.

**2.2.1 Srednja kvadratična vrednost**

Da bi se izognili odštevanju napak, lahko za kriterij uporabimo srednjo kvadratično vrednost napake. Kvadratična vrednost je vedno pozitivna, zato se pri povprečenju posamezne napake med seboj ne odštevaajo. Srednja kvadratična vrednost pa je primerna tudi zato, ker je proporcionalna moči signala napake, ki običajno predstavlja

šum v signalu na izhodu sistema. Nizka srednja kvadratična vrednost napake pomeni torej majhno moč šuma v izhodnem signalu.

Vzemimo, da se utež v času, ko računamo povprečno vrednost ne spreminja in velja:

$$w[n] = w \quad (2.3)$$

Označimo srednjo kvadratično vrednost napake s  $\xi$ :

$$\xi = \overline{\varepsilon^2[n]} = \overline{(d[n] - w x[n])^2}$$

in

$$\xi = \overline{x^2[n]w^2} - 2\overline{x[n]d[n]w} + \overline{d^2[n]} \quad (2.4)$$

Vidimo, da je srednja kvadratična napaka kvadratna funkcija uteži  $w$ . Oglejmo si pomen posameznih koeficientov v tej funkciji. Prvi koeficient

$$\overline{x^2[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x^2[n] \quad (2.5)$$

je srednja kvadratična vrednost signala oziroma moč signala. Dobimo jo kot vrednost avtokorelacijske funkcije:

$$r_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n]x[n-m]$$

pri vrednosti  $m = 0$ . Zaradi večje preglednosti jo bomo v nadaljevanju označevali s črko  $R$  brez indeksa:

$$R = r_0 = \overline{x^2[n]}$$

Drugi koeficient predstavlja korelacijo med signalom  $x[n]$  in referenčnim signalom  $d[n]$ :

$$\overline{x[n]d[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n]d[n] \quad (2.6)$$

Dobimo ga kot vrednost korelacijske funkcije:

$$p_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n]d[n-m]$$

pri vrednosti  $m = 0$  in ga bomo zaradi preglednosti v nadaljevanju označevali z veliko črko brez indeksa:

$$P = p_0 = \overline{x[n]d[n]}$$

Kadar je korelacija enaka 0, rečemo, da signala med seboj nista korelirana (si nista podobna). Kadar sta oba signala enaka, je korelacija enaka srednji moči posameznih signalov. Tretji koeficient

$$\overline{d^2[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} d^2[n] \quad (2.7)$$

predstavlja srednjo moč oziroma avtokorelacijo referenčnega signala. Limita pred vsotami v zgornjih izrazih je potrebna le, če povprečimo čez neskončno dolg interval. V praksi pa računamo povprečje le v omejenem časovnem intervalu, tako imenovano kratkotrajno povprečje. Na osnovi kratkotrajnega povprečja lahko potem v adaptivnem sistemu popravljamo utež.

Srednjo kvadratično vrednost napake lahko sedaj zapišemo v preglednejši obliki:

$$\xi = Rw^2 - 2Pw + \overline{d^2[n]} \quad (2.8)$$

Oglejmo si sedaj, kakšna je optimalna nastavitev uteži  $w$  sistema prvega reda. Optimalna nastavitev je tista, pri kateri je srednja kvadratična napaka najmanjša. Srednja kvadratična napaka je minimalna, kadar je njen odvod enak 0. Velja

$$\frac{d\xi}{dw} = 2(Rw - P)|_{w=w_{opt}} = 0 \quad (2.9)$$

kjer smo z  $w_{opt}$  označili optimalno vrednost uteži  $w$ . Dobimo:

$$w_{opt} = \frac{P}{R} \quad (2.10)$$

Optimalna utež  $z$  ozirom na srednjo kvadratično napako je enaka razmerju med korelacijo vhodnega in referenčnega signala z močjo vhodnega signala. Minimalno srednjo kvadratično napako dobimo, če optimalno utež vstavimo v izraz za napako. Dobimo:

$$\xi_{min} = \frac{P^2}{R} - 2\frac{P^2}{R} + \overline{d^2[n]} = \overline{d^2[n]} - w_{opt}P \quad (2.11)$$

Iz zgornjega izraza vidimo, da je, kadar vhodni in referenčni signal med seboj nista korelirana, minimalna moč signala napake kar enaka moči referenčnega signala. Optimalna nastavitev uteži je v tem primeru  $w_{opt} = 0$ , kar pomeni, da dobimo najmanjšo napako, če vhodnega signala ne prepuščamo skozi sistem.

Za zgornji primer signalov:

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \Phi)$$

$$d[n] = B \cos(\Omega n)$$

lahko sedaj izračunamo optimalno utež. Najprej izračunamo korelacijo:

$$\begin{aligned} P &= \overline{x[n]d[n]} = AB \overline{\cos(\Omega n + \Phi) \cos(\Omega n)} = \\ &= \frac{AB}{2} \left( \overline{\cos(\Phi)} + \overline{\cos(2\Omega n + \Phi)} \right) \end{aligned}$$

Povprečna vrednost drugega sumanda v zgornjem izrazu je enaka 0, zato dobimo:

$$P = \frac{AB}{2} \cos(\Phi)$$

Ker je  $x[n]$  periodičen signal, je njegova srednja moč enaka  $A^2/2$ . To upoštevamo v izrazu (2.10) in dobimo:

$$w_{opt} = \frac{P}{R} = \frac{B}{A} \cos(\Phi)$$

To upoštevamo v izrazu za minimalno moč napake (2.11) in dobimo:

$$\xi_{min} = \frac{B^2}{2} (1 - \cos^2(\Phi))$$

Vidimo, da je moč signala napake odvisna le od amplitude  $B$  referenčnega signala in kota  $\Phi$  med referenčnim signalom in vhodnim signalom, ni pa odvisna od amplitude vhodnega signala. To je razumljivo, kajti amplituda vhodnega signala ne more vplivati na napako pri optimalni nastavitvi, saj jo lahko poljubno spreminjamo z nastavljanjem uteži  $w$ .

Če signala med seboj nista fazno zamaknjena ( $\Phi = 0$ ), potem je optimalna utež enaka:

$$w_{opt} = \frac{B}{A}$$

Signala sta pri tej nastavitvi uteži enaka, srednja moč signala napake pa je enaka 0. Kadar je fazni zamik  $\Phi$  enak  $\pi/2$ , sta signala med seboj ortogonalna oziroma nekoreli-rana. Optimalna nastavev uteži je tedaj:

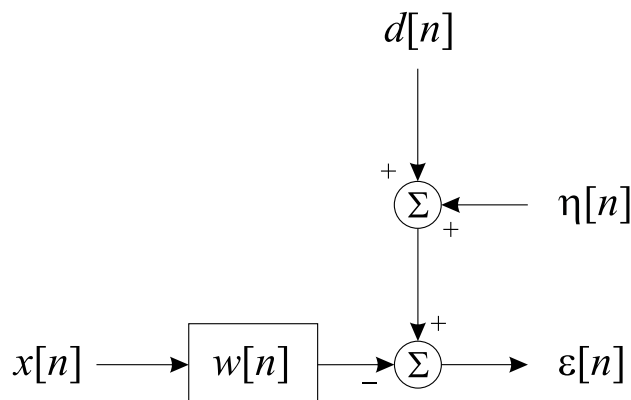
$$w_{opt} = 0$$

signal napake pa je kar enak referenčnemu signalu, zato je moč napake enaka  $B^2/2$ , to je srednji moči referenčnega signala.



### 2.3 Šum v referenčnem signalu

Oglejmo si primer, ko nimamo na razpolago referenčnega signala, temveč samo referenčni signal z dodanim šumom, kot je to prikazano na sliki 2.4.



Slika 2.4 – Sistem prvega reda s šumnim referenčnim signalom (sl2-2a)

Srednja moč signala napake je tedaj enaka:

$$\xi = \overline{(d[n] + \eta[n] - w x[n])^2} \quad (2.12)$$

Izraz kvadriramo in predpostavimo, da šum ni koreliran niti z vhodnim niti z referenčnim signalom:

$$\overline{x[n]\eta[n]} = 0$$

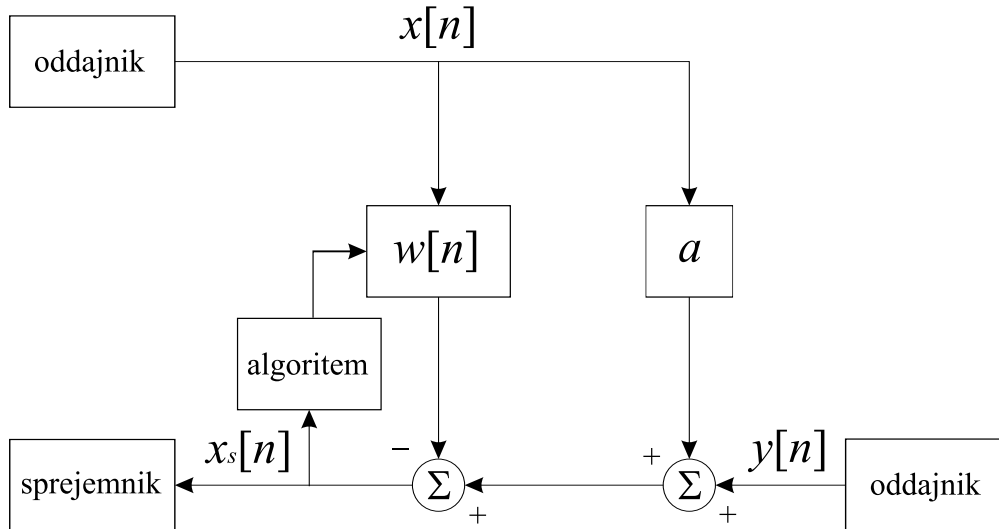
in

$$\overline{d[n]\eta[n]} = 0$$

Dobimo:

$$\xi = R w^2 - 2 P w + \overline{d^2[n]} + \overline{\eta^2[n]} \quad (2.13)$$

Vidimo, da se celotna moč šuma prišteje moči signala napake, drugače pa je enaka, kot v primeru brezšumne reference. Ker je kriterijski funkciji prišteta samo konstanta  $\overline{\eta^2[n]}$ , ki ni odvisna od uteži  $w$ , je odvod funkcije in zato tudi optimalna utež  $w_{opt}$  enaka kot v brezšumnem primeru.



Slika 2.5 – Izločevalnik presluha brez zakasnitve (sl2-4)

**Primer preprostega izločevalnika presluha.** Preprost izločevalnik presluha je prikazan na sliki 2.5

V vezju na sliki želimo, da bi bil sprejeti signal  $x_s[n]$  enak signalu z nasprotne strani  $y[n]$ . Moti ga preslušni signal, to je s konstanto  $a$  pomnožen signal  $x[n]$ . Zato vstavimo med točki A in B izločevalnik presluha, to je množilnik z utežjo  $w$ . Potem velja:

$$x_s[n] = x[n]a - x[n]w + y[n]$$

Pri nastavitvi uteži  $w = a$  se preslušni signal odšteje od sprejetega, tako, da je sprejeti signal enak signalu z nasprotne strani. Poglejmo, kaj dobimo, če za kriterijsko funkcijo uporabimo srednjo kvadratično vrednost sprejetega signala.

$$\begin{aligned} \overline{x_s^2[n]} &= \overline{(x[n]a - x[n]w + y[n])^2} = \\ &= \overline{Rw^2 - 2(aR + \overline{x[n]y[n]})w + 2a\overline{x[n]y[n]} + a^2R + \overline{y^2[n]}} \end{aligned}$$

Predpostavimo, da sta signala  $x[n]$  in  $y[n]$  med seboj nekorelirana. Dobimo:

$$\overline{x_s^2[n]} = \overline{Rw^2 - 2aRw + a^2R + \overline{y^2[n]}}$$

Odvajamo po  $w$  in izenačimo z 0. Dobimo

$$2Rw_{opt} - 2aR = 0$$

in

$$w_{opt} = a$$

Vidimo, da je srednja kvadratična vrednost sprejetega signala primerna kriterijska funkcija za ta primer. Signal z nasprotne strani se z ozirom na iskanje optimalne uteži  $w$  obnaša kot šum prištet referenčnemu signalu, referenčen signal pa je enak 0.

## 2.4 Dekorelacija signala napake

Pri optimalni nastavitvi uteži ( $w = w_{opt}$ ), signal napake  $\varepsilon[n]$  ni koreliran z vhodnim signalom  $x[n]$ , kar enostavno pokažemo tako, da obe strani enačbe:

$$\varepsilon[n] = d[n] - w_{opt}x[n]$$

množimo z  $x[n]$  in povprečimo:

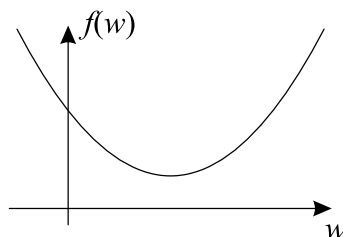
$$\overline{\varepsilon[n]x[n]} = \overline{d[n]x[n] - w_{opt}x^2[n]}$$

Upoštevamo, da je povprečje vsote enako vsoti povprečij in vstavimo še  $w_{opt}$  iz enačbe (2.10). Dobimo:

$$\overline{\varepsilon[n]x[n]} = \overline{d[n]x[n]} - \frac{P}{R} \overline{x^2[n]} = 0$$

## 2.5 Iskanje na osnovi gradienta

Ugovili smo že, da je v primeru, ko vzamemo za kriterijsko funkcijo srednjo kvadratično vrednost napake, kriterijska funkcija kvadratna funkcija uteži  $w$ . Primer kriterijske funkcije je prikazan na sliki 2.6.



Slika 2.6 – Kriterijska funkcija sistema prvega reda (sl2-5)

Veliko adaptivnih algoritmov išče minimum tako, da opazujejo gradient (naklon) kriterijske funkcije in spreminjajo utež v smeri največjega naklona.

### 2.5.1 Gradient kriterijske funkcije

Pri sistemu prvega reda je gradient kar odvod funkcije. Če je odvod negativen, je potrebno utež povečati, če pa je odvod pozitiven, je potrebno utež zmanjšati. Odvod smo v enačbi (2.9) zapisali kot:

$$\frac{d\xi}{dw} = 2(Rw - P) \quad (2.14)$$

Minimalna moč signala napake pa je po (2.11)

$$\xi_{min} = \overline{d^2[n]} - w_{opt}P \quad (2.15)$$

S premikom koordinatnega sistema v minimum kvadratne funkcije, dobimo:

$$\xi = \xi_{min} + (w - w_{opt})^2 R \quad (2.16)$$

Veljavnost gornjega izraza enostavno preverimo z vstavljanjem vrednosti za  $\xi_{min}$  in  $w_{opt}$ .

Izraz lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\xi = \xi_{min} + v^2 R \quad (2.17)$$

kjer je  $v$  odstopanje uteži  $w$  od njene optimalne nastavitve  $w_{opt}$ :

$$v = w - w_{opt} \quad (2.18)$$

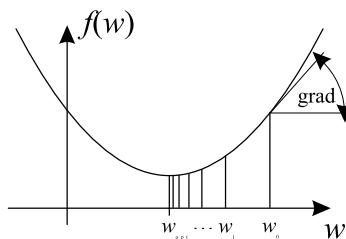
Odvod (naklon) kriterijske funkcije po  $v$  je enak odvodu po  $w$ , saj se odvod s premikom koordinatnega sistema ne spremeni. Zato velja:

$$\frac{d\xi}{dw} = \frac{d\xi}{dv} = 2vR \quad (2.19)$$

### 2.5.2 Rekurzivno popravljanje uteži

Ker kriterijske funkcije ne poznamo, začnemo pri iskanju na osnovi gradienta tako, da si najprej izberemo začetno vrednost uteži  $w = w[0]$ , izmerimo naklon kriterijske funkcije

in nato v skladu s tem naklonom popravimo utež. Če je naklon pozitiven, moramo utež zmanjšati in, če je negativen utež povečamo. Ker je naklon proporcionalen odmiku uteži od optimalne vrednosti, so lahko tudi popravki proporcionalni naklonu. Zaporedni približki uteži so prikazani na sliki 2.7.



Slika 2.7 – Postopno približevanje optimalni vrednosti uteži (sl2-6)

Utež popravljamo po enačbi:

$$w[m + 1] = w[m] - \mu \nabla[m] \quad (2.20)$$

Kjer je  $w[m]$  trenutni približek uteži,  $w[m + 1]$  naslednji približek in  $\nabla[m]$  odvod pri uteži  $w[m]$ :

$$\nabla[m] = \left. \frac{d\xi}{dw} \right|_{w[m]} = 2(w[m] - w_{opt})R$$

Upoštevajmo to v enačbi (2.20) in jo preuredimo. Dobimo:

$$w[m + 1] = (1 - 2\mu R)w[m] + 2\mu R w_{opt} \quad (2.21)$$

Označimo še:

$$k = 1 - 2\mu R \quad (2.22)$$

Upoštevajmo to v enačbi (2.20) in jo preuredimo. Dobimo:

$$w[m + 1] = kw[m] + (1 - k)w_{opt} \quad (2.23)$$

To je rekurzivna enačba, po kateri izračunamo naslednji približek iz prejšnjega približka. Oglejmo si nekaj prvih zaporednih približkov, po prvem približku  $w_0$ :

$$w[1] = kw[0] + w_{opt}(1 - k)$$

$$w[2] = k^2w[0] + w_{opt}(1 - k)(k + 1)$$

$$w[3] = k^3 w[0] + w_{opt}(1 - k)(k^2 + k + 1)$$

Na osnovi teh prvih členov lahko zapišemo splošno enačbo z  $m$ -ti približek:

$$w[m] = k^m w[0] + w_{opt}(1 - k) \sum_{n=0}^{m-1} k^n \quad (2.24)$$

Vsota v enačbi predstavlja geometrijsko vrsto, zato lahko zapišemo:

$$w[m] = k^m w[0] + w_{opt}(1 - k) \frac{1 - k^m}{1 - k}$$

in dalje:

$$w[m] = w_{opt} + k^m (w[0] - w_{opt}) \quad (2.25)$$

Enačba (2.25) omogoča neposreden izračun približka uteži po  $m$  popravkih.

### 2.5.3 Konvergenca postopka

Če si natančneje ogledamo dobljeni rezultat vidimo, da ima v njem pomembno vlogo faktor geometrijske vrste  $k$ . Da bi bila geometrijska vrsta v (2.24) konvergentna, to je, da bi se zaporedni približki  $w_m$  približevali optimalni vrednosti  $w_{opt}$  z naraščajočim  $m$ , mora biti izpolnjen pogoj:

$$|k| < 1$$

Kadar je pogoj izpolnjen velja:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = w_{opt}$$

Kadar ta pogoj ni izpolnjen, pravimo, da proces adaptacije ni stabilen, zaporedni približki pa so vedno bolj oddaljeni od optimalne vrednosti. Če v zgornjem pogoju sedaj upoštevamo definicijo faktorja geometrijske vrste  $k$  (2.22) dobimo:

$$|1 - 2\mu R| < 1$$

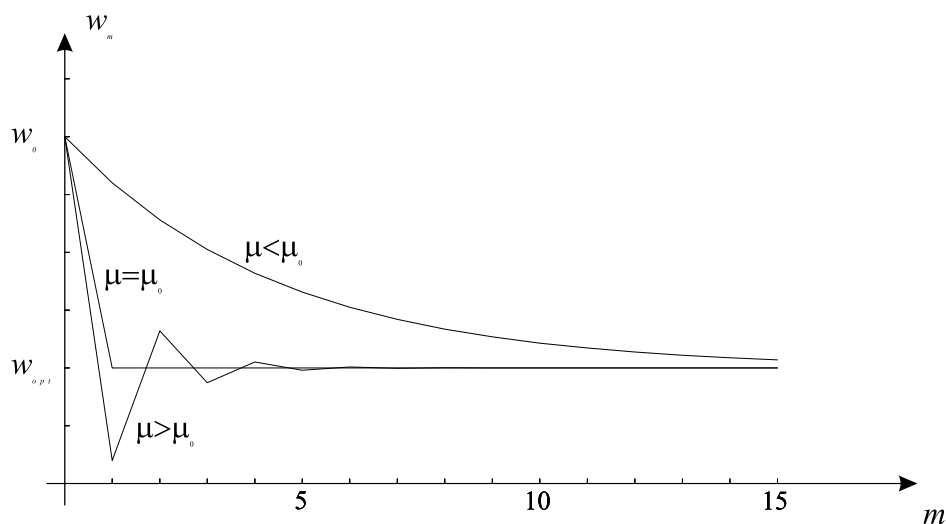
oziroma

$$0 < \mu < \frac{1}{R}$$

Vidimo, da je ustrezna izbira adaptacijskega faktorja  $\mu$  odvisna od moči signala. Iz enačbe (2.25) vidimo, da je hitrost adaptacije neposredno odvisna od faktorja geometrijske vrste  $k$  in s tem tudi posredno od faktorja adaptacije  $\mu$ . Najhitrejšo adaptacijo dobimo pri  $k = 0$ , čemer ustreza adaptacijski faktor:

$$\mu = \mu_0 = \frac{1}{2R}$$

V tem primeru se adaptacija izvede v enem koraku, kar ustreza tako imenovani Newtonovi metodi. Pri drugačni izbiri  $\mu$  se optimalni vrednosti približujemo postopoma. To imenujemo metoda postopnega približevanja. Kasneje bomo videli, da sta adaptacijski enačbi za ti dve metodi v sistemih z več utežmi različni in se ne razlikujeta zgolj v adaptacijski konstanti. Približevanje uteži njeni optimalni vrednosti pri različnih faktorjih adaptacije je prikazano na sliki 2.8.



Slika 2.8 – Popravljanje uteži pri različnih faktorjih adaptacije  $\mu$  (sl2-7)

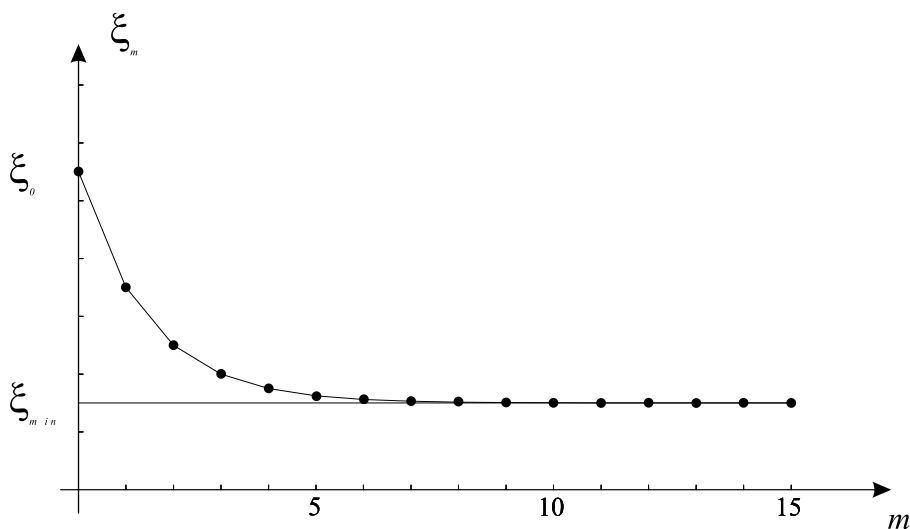
Vidimo, da se pri izbiri  $\mu < \mu_0$  optimalni vrednosti uteži  $w_{opt}$  približujemo z iste strani, pri  $\mu > \mu_0$  pa pride do prenehaja, ki mu sledi dušeno nihanje uteži okrog njene optimalne vrednosti.

### 2.5.4 Krivulja učenja

Skladno s približevanjem uteži  $w_m$  njeni optimalni vrednosti  $w_{opt}$  se napaka  $\xi_m$  približuje minimalni vrednosti  $\xi_{min}$ . Vstavimo približek uteži  $w_m$  iz enačbe (2.25) v enačbo (2.16). Dobimo:

$$\xi[m] = \xi_{min} + R(w[0] - w_{opt})^2 k^{2m} \quad (2.26)$$

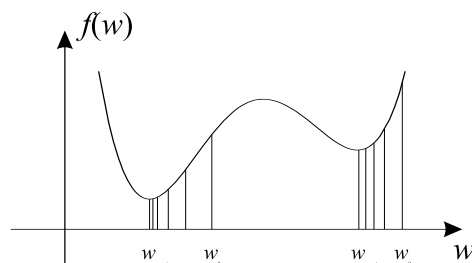
Ker je  $k^{2m}$  vedno pozitivno število, je srednja kvadratična napaka  $\xi$  vedno večja od minimalne vrednosti  $\xi_{min}$ , kar je pričakovati, saj drugače  $\xi_{min}$  ne bi bila minimalna. Na sliki 2.9 je prikazana krivulja zaporednih vrednosti srednje kvadratične vrednosti napake med adaptacijskim procesom. To krivuljo imenujemo tudi krivulja učenja.



Slika 2.9 – Krivulja učenja pri različnih vrednostih adaptacijskega faktorja  $\mu$  (sl2-8)

Iskanje optimalne vrednosti uteži na osnovi gradienta je zelo primerno, kadar je, kot je bilo to v našem primeru, kriterijska funkcija kvadratična funkcija uteži. V splošnem to ni nujno, saj je oblika funkcije odvisna tako od strukture adaptivnega sistema kot od izbire samega kriterija. Gradientno metodo lahko uporabimo tudi kadar kriterijska funkcija ni kvadratična, vendar obstaja nevarnost, da se adaptacija ujame v lokalni minimum, kar je odvisno od začetne izbire uteži, kot je to razvidno iz slike 2.10.





Slika 2.10 – Uporaba gradientne metode pri kriterijski funkciji, ki ni kvadratična (sl2-9)

### 2.5.5 Izračun gradienta

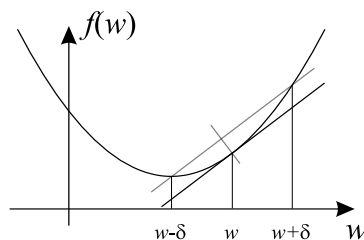
V prejšnjem razdelku smo predpostavili, da poznamo gradient  $\nabla_m$  v vseh korakih adaptacije. Približek v koraku  $m + 1$  smo namreč izračunali na osnovi gradienta v koraku  $m$ :

$$w[m + 1] = w[m] - \mu \nabla[m]$$

Ker gradienta ne poznamo, ga moramo dobiti na osnovi meritev signala napake. Približek gradienta lahko izračunamo po enačbi:

$$\frac{d\xi}{dw} \approx \frac{\xi(w + \delta) - \xi(w - \delta)}{2\delta} \quad (2.27)$$

V splošnem je zgornji izraz v limiti, ko gre  $\delta$  proti 0 enak gradientu, pri kvadratični funkciji pa enakost velja tudi za večje vrednosti  $\delta$ . Meritev gradienta za kvadratično funkcijo je prikazana na sliki 2.11.



Slika 2.11 – Meritev gradienta kvadratične funkcije (sl2-10)

Iz enačbe (2.27) je razvidno, da moramo, zato, da bi lahko izmerili gradient, utež  $w_m$  spreminjati za  $\delta$  okrog njene centralne vrednosti. Ker nas zanima srednja kvadratična napaka in ne trenutna vrednost, potrebujemo za izračun  $N$  meritev v vaski točki. Zgoraj povedano ima predvsem dve posledici:

1. zaradi merjenja gradienta se čas adaptacije poveča za faktor  $2N$  glede na čas, ki bi ga porabili, če bi bil gradient znan v vsakem časovnem trenutku  $n$ , in bi lahko utež sproti popravljali in
2. zaradi spreminjanja uteži okrog njene centralne vrednosti se poveča srednja kvadratična vrednost napake, kar je najbolj pomembno ob koncu adaptacije, ko bi morala biti utež enaka  $w_{opt}$ , vendar se zaradi meritve gradienta spreminja za  $\delta$  okrog optimalne vrednosti.

Označimo z  $M_p$  relativno povečanje srednje kvadratične napake glede na njeno minimalno vrednost zaradi spreminjanja (perturbacije) uteži:

$$M_p = \frac{\Delta\xi}{\xi_{min}} \quad (2.28)$$

Kjer je z  $\Delta\xi$  označen presežek napake zaradi spreminjanja uteži:

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}[\xi(w - \delta) + \xi(w + \delta)] - \xi(w)$$

Če v zgornjo enačbo vstavimo izraz za srednjo kvadratično napako (2.17) dobimo:

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}[2\xi_{min} + (v - \delta)^2 R + (v + \delta)^2 R] - v^2 R - \xi_{min}$$

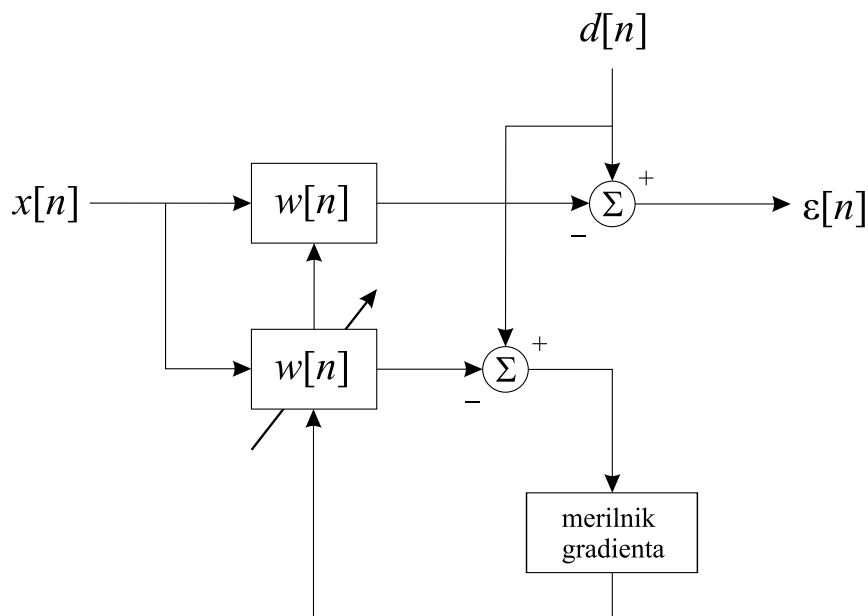
in

$$\Delta\xi = \delta^2 R$$

Zanimivo je, da presežek napake pri kvadratni funkciji ni odvisen od trenutne vrednosti uteži temveč le od moči signala in premika  $\delta$ . Če to sedaj upoštevamo v enačbi za relativen presežek (2.28), dobimo:

$$M_p = \frac{\delta^2 R}{\xi_{min}} \quad (2.29)$$

Napaki zaradi spreminjanja uteži na meritev gradienta se lahko izognemo tako, da meritve ne izvajamo na delujočem sistemu (on-line). Za meritev gradienta v tem primeru uporabimo vzporeden sistem (off-line), ki mu perturbiramo uteži, nato pa na osnovi izračunanega gradienta, obema sistemoma nastavimo novo utež, kot je to prikazano na sliki 2.12.



Slika 2.12 – Merjenje gradienta z vzporednim sistemom (sl2-11)

### 2.5.6 Napaka pri merjenju gradienta

V prejšnjem razdelku smo si ogledali, kako lahko na osnovi merjenja srednje kvadratične vrednosti napake izračunamo gradient kriterijske funkcije. Spomnimo se definicije srednje kvadratične vrednosti napake:

$$\xi = \overline{\varepsilon^2[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} \varepsilon^2[n]$$

Vidimo, da v tej napaki nastopa limita, kar pomeni, da bi morali za točno meritev srednje kvadratične vrednosti napake izmeriti neskončno vrednosti napake in izračunati povprečje, kar z drugimi besedami pomeni, da bi morali počakati do konca signala, če je ta časovno omejen, in šele potem bi lahko izračunali točno vrednost napake in s tem tudi točno vrednost gradienta. Ker nam to ne bi prav nič pomagalo, moramo izvesti izračun gradienta na osnovi manjšega števila vzorcev napake. Srednja kvadratična vrednost napake zato ne bo točno izmerjena, temveč bo odstopala od svoje točne vrednosti. Označimo izmerjeno vrednost srednje kvadratične napake v  $m$ -ti iteraciji s  $\xi_m$ . Odstopanje od točne vrednosti je potem enako:

$$\Delta\xi[m] = \xi[m] - \xi$$

Kot merilo točnosti meritve običajno uporabljamo varianco  $\text{var}(\xi_m)$  to je srednjo kvadratično vrednost odstopanja od srednje vrednosti:

$$\text{var}(\xi[m]) = \overline{(\Delta\xi[m])^2} = \overline{(\xi[m] - \xi)^2} \quad (2.30)$$

V statistiki se pogosto namesto variance uporablja standardna deviacija  $\sigma_\xi$ , ki je enaka kvadratnemu korenu variance in predstavlja efektivno vrednost odstopanja.

$$\sigma_\xi = \sqrt{\text{var}(\xi[m])}$$

Vzemimo sedaj, da izračunamo približno vrednost srednje kvadratične napake  $\xi_m$  s povprečenjem  $N$  vzorcev kvadrata napake:

$$\xi[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} \varepsilon^2[n] \quad (2.31)$$

Vstavimo (2.31) v (2.30). Dobimo:

$$\text{var}(\xi_m) = \overline{\left( \frac{1}{N} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} \varepsilon^2[n] - \xi \right)^2}$$

Če v zgornjem izrazu upoštevamo:

$$\xi[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} \xi[n]$$

lahko zapišemo:

$$\text{var}(\xi_m) = \overline{\left( \frac{1}{N} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} (\varepsilon^2[n] - \xi) \right)^2}$$

Kvadriramo in upoštevamo, da je povprečje vsote enako vsoti povprečij:

$$\text{var}(\xi_m) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} \sum_{k=mN}^{N(m+1)-1} \overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)(\varepsilon^2[k] - \xi)} \quad (2.32)$$

Razlika  $(\varepsilon^2[n] - \xi)$  predstavlja odstopanje trenutne kvadratične vrednosti napake od njene povprečne vrednosti. Predpostavimo, da so ta odstopanja med seboj statistično neodvisna. Torej velja:

$$\overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)(\varepsilon^2[k] - \xi)} = 0 \quad ; \quad n \neq k$$

in

$$\overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)(\varepsilon^2[k] - \xi)} = \overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)^2} \quad ; \quad n = k$$

Upoštevajmo to v enačbi (2.32). Dobimo:

$$\text{var}(\xi[m]) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=mN}^{N(m+1)-1} \overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)^2} = \frac{\text{var}(\varepsilon^2[n])}{N} \quad (2.33)$$

kjer je

$$\text{var}(\varepsilon^2[n]) = \overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)^2}$$

varianca kvadratične vrednosti napake. Vidimo, da se varianca pri povprečenju  $N$  vrednosti zmanjša za faktor  $N$ . Z večanjem  $N$  tako zmanjšujemo varianco, vendar obenem povečujemo čas, ki je potreben za meritev.

### 2.5.7 Varianca kvadratične vrednosti napake

V prejšnjem razdelku smo videli, da potrebujemo za izračun variance približka srednje kvadratične vrednosti napake varianco trenutne kvadratične vrednosti napake:

$$\text{var}(\varepsilon^2[n]) = \overline{(\varepsilon^2[n] - \xi)^2}$$

Izraz pod povprečjem kvadriramo in upoštevamo, da je povprečje vsote enako vsoti povprečij. Ker je  $\xi$  konstanta, je ni potrebno povprečiti.

$$\text{var}(\varepsilon^2[n]) = \overline{\varepsilon^4[n]} - 2\xi\overline{\varepsilon^2[n]} + \xi^2 \quad (2.34)$$

Ker po definiciji velja:

$$\xi = \overline{\varepsilon^2[n]}$$

lahko izraz (2.34) zapišemo v obliki:

$$\text{var}(\varepsilon^2[n]) = \overline{\varepsilon^4[n]} - \xi^2 \quad (2.35)$$

Izraz (2.35) predstavlja varianco kvadratične vrednosti napake. V tem izrazu moramo določiti še srednjo vrednost četrte potence napake  $\overline{\varepsilon^4[n]}$ , kar imenujemo tudi četrti moment napake. Iz teorije verjetnosti vemo, da lahko izračunamo srednjo vrednost

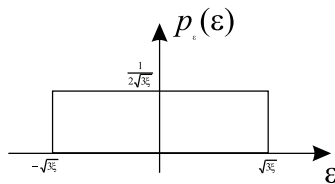
naključne spremenljivke, če poznamo njeno verjetnostno porazdelitev. Ker je  $\varepsilon^4[n]$  tudi naključna spremenljivka, velja:

$$\overline{\varepsilon^4[n]} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^4 p_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon$$

kjer je  $p_{\varepsilon}(\varepsilon)$  gostota verjetnostne porazdelitve signala napake  $\varepsilon[n]$ . Gostota verjetnostne porazdelitve signala napake je odvisna od vhodnega signala, od referenčnega signala in od izbrane uteži  $w$ , tako da v splošnem te porazdelitve ne poznamo. Predpostavimo lahko, da signal napake nima enosmerne komponente, kadar je izbrana utež  $w$  blizu optimalne vrednosti  $w_{opt}$ . To lahko predpostavimo zato, ker je pri optimalni vrednosti uteži  $w$  signal napake dekoreliran z vhodnim signalom. Če se torej želimo izogniti enosmerni komponenti v signalu napake, lahko to storimo tako, da vhodnemu signalu dodamo enosmerno komponento. Zaradi dekorelacije signala napake z vhodnim signalom v signalu napake ne more biti enosmerne komponente, oziroma je njegova srednja vrednost enaka 0. Oglejmo si sedaj četrti moment pri dveh različnih tipičnih porazdelitvah verjetnosti: enakomerni in Gaussovi. Ker vemo, da je srednja kvadratična vrednost naključne spremenljivke  $\varepsilon$  enaka  $\xi$  lahko enakomerno porazdelitev zapišemo v obliki:

$$p_{\varepsilon}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3\xi}} & ; |\varepsilon| \leq \sqrt{3\xi} \\ 0 & ; \text{drugače} \end{cases}$$

Enakomerna porazdelitev je prikazana na sliki 2.13.



Slika 2.13 – Enakomerna porazdelitev gostote verjetnosti ( $\bar{\varepsilon} = 0, \bar{\varepsilon^2} = \xi$ ) (sl2-12)

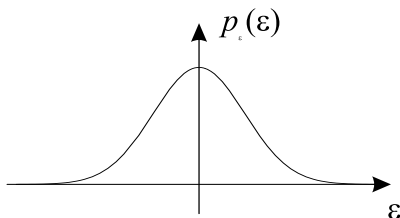
Četrti moment je tako pri enakomerni porazdelitvi enak:

$$\overline{\varepsilon^4} = \frac{1}{2\sqrt{3\xi}} \int_{-\sqrt{3\xi}}^{\sqrt{3\xi}} \varepsilon^4 d\varepsilon = \frac{2}{2\sqrt{3\xi}} \frac{9\xi^2 \sqrt{3\xi}}{5} = \frac{9\xi^2}{5}$$

Podobno si lahko za Gaussovo porazdelitev

$$p_{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\varepsilon^2/2\xi}$$

ki je prikazana na sliki 2.14, izračunamo četrti moment:



Slika 2.14 – Gaussova porazdelitev gostote verjetnosti ( $\bar{\varepsilon} = 0, \bar{\varepsilon}^2 = \xi$ ) (sl2-13)

$$\bar{\varepsilon}^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^4 e^{-\varepsilon^2/2\xi} d\varepsilon$$

Z uvedbo nove spremenljivke:

$$u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}} \text{ in } d\varepsilon = \sqrt{\xi} du$$

dobimo

$$\bar{\varepsilon}^4 = \frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2/2} du$$

V matematičnem priročniku lahko najdemo, da je vrednost določenega integrala v zgornjem izrazu enaka  $3\sqrt{2\pi}$ , torej velja:

$$\bar{\varepsilon}^4 = 3\xi^2$$

Vidimo, da je pri Gaussovi porazdelitvi četrti moment nekoliko večji kot pri enakomerni porazdelitvi. Pokazati je mogoče tudi, da je četrti moment največji ravno pri Gaussovi porazdelitvi. Varianca kvadratične vrednosti napake (2.35) je neposredno odvisna od četrtega momenta napake, zato bo največja, kadar je četrti moment največji. Če vzamemo za četrti moment kar največjo vrednost  $3\xi^2$ , to je vrednost, ki smo jo dobili za Gaussovo porazdelitev, smo varianco napake v splošnem rahlo pesimistično ocenili. Pri drugih porazdelitvah bo ta nekoliko manjša. Pesimistična ocena variance napake je torej:

$$\text{var}(\varepsilon^2[n]) = 3\xi^2 - \xi^2 = 2\xi^2 \quad (2.36)$$

Pesimistična ocena variance izmerjene srednje kvadratične napake je tako po enačbi (2.33) enaka:

$$\text{var}(\xi[m]) = \frac{\text{var}(\varepsilon^2[n])}{N} = \frac{2\xi^2}{N} \quad (2.37)$$

### 2.5.8 Presežek srednje kvadratične vrednosti napake

Zaradi nenatančne meritve srednje kvadratične napake je nenatančen tudi gradient, ki ga iz nje izračunamo po enačbi (2.27):

$$\hat{\nabla}[m] = \frac{\xi[m]_{(w+\delta)} - \xi[m]_{(w-\delta)}}{2\delta}$$

Varianca približka gradienta je potem enaka:

$$\text{var}(\hat{\nabla}[m]) = \frac{\text{var}(\xi(w[m] + \delta)) + \text{var}(\xi(w[m] - \delta))}{4\delta^2}$$

Če v zgornji enačbi upoštevamo (2.37) in zanemarimo povečanje napake zaradi perturbacije, dobimo:

$$\text{var}(\hat{\nabla}[m]) = \frac{\xi^2}{N\delta^2} \quad (2.38)$$

Označimo z  $\eta_m$  odstopanje gradienta od njegove prave vrednosti

$$\eta[m] = \nabla[m] - \hat{\nabla}[m] \quad (2.39)$$

ki ima srednjo kvadratično vrednost enako varianci gradienta:

$$\overline{\eta^2[m]} = \text{var}(\hat{\nabla}[m]) = \frac{\xi^2}{N\delta^2} \quad (2.40)$$

Rekurzivna enačba za adaptivno popravljane uteži (2.20), ki temelji na približni vrednosti gradienta je sedaj:

$$w[m+1] = w[m] - \mu\nabla_m + \mu\eta_m \quad (2.41)$$

oziroma izražena z odstopanjem od optimalne uteži  $v$ :

$$v[m+1] = v[m] - \mu\nabla[m] + \mu\eta[m] \quad (2.42)$$

Vstavimo v zgornji izraz gradient izražen z  $v$  v skladu z enačbo (2.19):

$$v[m+1] = v[m] - 2\mu v[m]R + \mu\eta[m] = v[m](1 - 2\mu R) + \mu\eta[m] = kv[m] + \mu\eta_m$$

kjer je  $k$  definiran enako kot v izrazu (2.22):

$$k = 1 - 2\mu R \quad (2.43)$$



in ima tudi enak pomen. Z zapisom nekaj zaporednih približkov:

$$v[1] = kv[0] + \mu\eta_0$$

$$v[2] = k^2v[0] + \mu(k\eta[0] + \eta[1])$$

$$v_3 = k^3v_0 + \mu(k^2\eta_0 + k\eta_1 + \eta_2)$$

pridemo do splošne enačbe

$$v[m] = k^m v[0] + \mu \sum_{n=0}^{m-1} k^n \eta[m-n-1]$$

Kadar je adaptacija konvergentna ( $|k| < 1$ ) v mirovnem stanju ostane le drugi člen zgornje enačbe, ki predstavlja odstopanje uteži od njene optimalne vrednosti v mirovnem stanju zaradi netočne meritve gradienta:

$$v = w - w_{opt} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} k^n \eta[m-n-1]$$

Varianca uteži v mirovnem stanju je torej enaka:

$$\text{var}(w) = \text{var}(v) = \mu^2 \overline{\left[ \sum_{n=0}^{\infty} k^n \eta[m-n-1] \right]^2}$$

Ob upoštevanju nekoreliranosti napake gradienta dobimo:

$$\text{var}(w) = \mu^2 \overline{\eta_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} = \frac{\mu^2 \overline{\eta_m^2[n]}}{1 - k^2} \quad (2.44)$$

V ravnotežnem stanju je srednja kvadratična napaka  $\xi$  približno enaka minimalni vrednosti  $\xi_{min}$ , zato je varianca gradienta  $\overline{\eta_n^2}$  v skladu z enačbo (2.40) enaka:

$$\overline{\eta[n]^2} = \frac{\xi_{min}^2}{N\delta^2}$$

To upoštevamo v enačbi (2.44) in za  $k$  vstavimo vrednost iz (2.43). Dobimo:

$$\text{var}(w) = \frac{\mu^2 \xi_{min}^2}{4N\delta^2 R(1 - \mu R)} \quad (2.45)$$

Enačba (2.45) predstavlja varianco odstopanja uteži  $w$  od njene optimalne vrednosti. To odstopanje se večja, če povečujemo adaptacijski faktor  $\mu$  in če zmanjšujemo število meritev pri izračunu povprečne vrednosti napake, to je, če pospešimo hitrost adaptacije.

Zaradi šuma v pocesu adaptacije utež torej tudi v ravnotežnem stanju ne zavzame svoje optimalne vrednosti  $w_{opt}$ , temveč se stalno spreminja, vendar ostaja v njeni bližini. Srednja kvadratična napaka je zato nekoliko večja od minimalne vrednosti  $\xi_{min}$ . Presežek napake je, kot je to razvidno iz enačbe 2.17, neposredno odvisen od  $v$ , to je od odstopanja uteži od optimalne vrednosti:

$$\xi - \xi_{min} = v^2 R \quad (2.46)$$

S povprečenjem zgornjega izraza dobimo povprečno povečanje srednje kvadratične vrednosti napake v ravnotežnem stanju:

$$\overline{\xi - \xi_{min}} = \overline{v^2} R$$

in dalje, z upoštevanjem (2.45):

$$\overline{\xi - \xi_{min}} = \frac{\mu^2 \xi_{min}^2}{4N\delta^2(1 - \mu R)}$$

Podobno kot smo pri presežku napake zaradi perturbacije, definirali perturbacijo  $M_p$  kot relativen presežek napake zaradi perturbacije uteži (2.28), definiramo tu neprilagojenost  $M_g$  (misadjustment) kot relativno vrednost presežka zaradi neprilagoditve uteži pri šumnem gradientu:

$$M_g = \frac{\overline{\xi - \xi_{min}}}{\xi_{min}} = \frac{\mu \xi_{min}}{4N\delta^2(1 - \mu R)} \quad (2.47)$$

V razdelku 2.5 smo ugotovili da dobimo z izbiro  $\mu = 1/2R$  adaptacijo v enem koraku. Neprilagojenost je tedaj enaka:

$$M_g = \frac{\xi_{min}}{4N\delta^2 R}$$

Za večjo nazornost dobljenih rezultatov izrazimo neprilagojenost še s časovno konstanto  $\tau$ , to je številom vzorcev v katerem pade presežek srednje kvadratične napaka  $\xi - \xi_{min}$  za faktor  $e$ . Če v izrazu (2.46) upoštevamo, da je potrebnih v vsaki iteraciji  $2N$  meritev napake za izračun gradienta:

$$n = 2mN$$

lahko časovno konstanto izračunamo iz enakosti:

$$k^{2m} = k^{n/N} = e^{-n/\tau}$$

Logaritmiramo obe strani enačbe in izrazimo  $\tau$ . Dobimo:

$$\tau = -\frac{N}{\ln k} \approx -\frac{N}{k-1} = \frac{N}{\mu R}$$

Izrazimo  $\mu$  iz zgornje enačbe in vstavimo v izraz za neprilagojenost(2.47). Dobimo:

$$M_g = \frac{\xi_{min}}{4\delta^2\tau R(1 - N/\tau)} \quad (2.48)$$

Ker je običajno, razen pri adaptaciji v enem koraku,  $N \ll \tau$ , lahko zapišemo:

$$M_g = \frac{\xi_{min}}{4\delta^2\tau R} \quad (2.49)$$

Neprilagoditev je obratno sorazmerna razmerju med močjo signala in šuma  $R$ : slabše razmerje med signalom in šumom poveča neprilagoditev. Neprilagoditev je obratnosorazmerna tudi s časovno konstanto  $\tau$ , kar pomeni, da povečanje hitrosti adaptacije poveča tudi neprilagoditev. S povečevanjem  $\delta$  sicer lahko zmanjšamo neprilagoditev, vendar se, kadar merimo gradient na delujočem sistemu, zaradi tega povečuje perturbacija (2.29):

$$M_p = \frac{\delta^2 R}{\xi_{min}}$$

Če to upoštevamo v izrazu (2.49) dobimo:

$$M_g = \frac{1}{4\tau M_p} \quad (2.50)$$

kar pomeni, da je neprilagoditev obratnosorazmerna perturbaciji.

Celotna srednja kvadratična vrednost napake v mirovnem stanju  $\xi_0$ , če upoštevamo njeno povečanje zaradi perturbacije in neprilagoditve, je enaka:

$$\xi_0 = (1 + M_p + M_g) \xi_{min} = \left(1 + M_p + \frac{1}{4\tau M_p}\right) \xi_{min} \quad (2.51)$$

Minimalno vrednost napake  $\xi_0$  dobimo, kadar je njen odvod po  $M_p$  enak 0:

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial M_p} = \left(1 - \frac{1}{4\tau M_p^2}\right) \xi_{min} = 0$$

Najmanjšo napako dobimo pri:

$$M_p = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

neprilagoditev pa je tedaj, v skladu z (2.50), enaka:

$$M_g = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

To pomeni, da je celotna srednja kvadratična vrednost napake najmanjša, kadar je povečanje šuma zaradi neprilagoditve enako povečanju šuma zaradi perturbacije uteži.

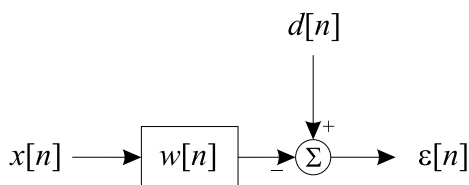
Celotna neprilagoditev je tedaj enaka:

$$M = M_g + M_p = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (2.52)$$

Srednja kvadratična napaka v ravnotežnem stanju pa je enaka:

$$\xi_{0min} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \xi_{min} \quad (2.53)$$

## 2.6 LMS algoritem



Slika 2.15 – Adaptivni sistem z eno utežjo (sl2-14)

V prejšnjih razdelkih smo si ogledali, kako lahko adaptivnemu sistemu z eno utežjo na sliki 2.15 popravljamo utež na osnovi merjenja gradienta kriterijske funkcije. Kot kriterijska funkcija je služila srednja kvadratična vrednost napake. Za računanje srednje vrednosti je bilo potrebno izmeriti napako v dveh točkah v bližini trenutne vrednosti uteži. Tak postopek je dokaj splošen in ni omejen zgolj na primer, ko je kriterijska funkcija kvadratna funkcija uteži. Postopek pripelje do minimuma vedno, kadar v kriterijski funkciji ni lokalnih minimumov, v katere bi se adaptacija na osnovi gradienta lahko ujela.

V tem razdelku si bomo ogledali preprost, vendar učinkovit in računsko nezahteven postopek, pri katerem ni potrebno računanje povprečja na osnovi več meritev napake. Pri tem postopku popravljamo utež sproti, v vsakem časovnem trenutku  $n$ . Zapišimo

še enkrat enačbo napake v  $n$ -tem časovnem trenutku:

$$\varepsilon[n] = d[n] - w[n]x[n]$$

V prejšnjih razdelkih smo gradient računali iz kratkoročnega povprečja kvadrata napake, v tem razdelku pa si oglejmo, kaj se zgodi, če namesto kratkoročnega povprečja vzamemo kar kvadrat trenutne vrednosti napake  $\varepsilon^2[n]$ . Približek gradienta v  $n$ -tem časovnem trenutku je potem dan z:

$$\hat{\nabla}[n] = \frac{\partial \varepsilon^2[n]}{\partial w[n]} = 2 \varepsilon[n] \frac{\partial \varepsilon[n]}{\partial w[n]}$$

in

$$\hat{\nabla}[n] = -2 \varepsilon[n]x[n] \quad (2.54)$$

Utež popravljamo v smeri negativnega gradienta, enako kot v enačbi (2.20), vendar jo tu popravljamo v vsakem časovnem trenutku, zato namesto posebnega indeksa števila iteracij  $m$  uporabljamo kar časovni indeks  $n$ :

$$w[n+1] = w[n] - \mu \hat{\nabla}[n] \quad (2.55)$$

Če uporabimo v izrazu (2.55) približno vrednost gradienta (2.54) dobimo:

$$w[n+1] = w[n] + 2 \mu \varepsilon[n]x[n] \quad (2.56)$$

Izraz (2.56), po katerem popravljamo utež v vsakem časovnem trenutku, imenujemo LMS (least mean square) algoritem. Pomen parametra  $\mu$  je enak kot v prej opisanih postopkih. Z njim določamo hitrost adaptacije in konvergenco postopka. Pri LMS algoritmu moramo imeti na voljo tudi vhodni signal  $x[n]$ , kot je to razvidno iz enačbe (2.55).

Ker smo za izračun gradienta srednje kvadratične napake uporabili kar trenutno vrednost napake, lahko računamo, da bo napaka v gradientu dokaj velika, in popravki uteži včasih tudi napačni. V povprečju pa pričakujemo, da bo pravih več popravkov kot napačnih in se bo zato utež globalno popravljala v pravi smeri in se približevala svoji optimalni vrednosti. Ravno tako je razumljivo, da bo moral biti adaptacijski faktor  $\mu$  v primerjavi s prej opisanim postopkom majhen, ker bi pri velikem  $\mu$  napaka

v gradientu povzročala prevelike popravke v napačni smeri, predvsem v ravnotežnem stanju. Sklepali bi lahko, da bo zaradi tega adaptacija počasnejša, vendar to ni nujno res. Spomniti se moramo namreč, da smo prej porabili  $2N$  vzorčnih intervalov za merjenje gradienta, kar pa tu ni potrebno.

Velika prednost LMS algoritma je v njegovi preprostosti. Popravljanje uteži je računsko nezahtevno, računanje povprečja ni potrebno, ravno tako ni potrebna perturbacija uteži in zato tudi ni potrebe po vzporednem sistemu za merjenje gradienta.

### 2.6.1 Analiza LMS algoritma

Pokažimo najprej, da je povprečna vrednost približka gradienta, ki ga dobimo iz trenutne vrednosti kvadrata napake enaka pravi vrednosti gradienta, če uteži ne bi popravljali in bi imela konstantno vrednost:

$$w[n] = w$$

Povprečna vrednost približka gradienta je potem enaka:

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\nabla}[n]} &= -2\overline{\varepsilon[n]x[n]} \\ &= -2\overline{(d[n]x[n] - w x^2[n])} \\ &= 2(w \overline{x^2[n]} - \overline{d[n]x[n]}) \end{aligned}$$

Zadnja vrstica je enaka odvodu srednje kvadratične vrednosti napake (2.14), to je gradientu napake, torej velja:

$$\overline{\hat{\nabla}[n]} = \nabla$$

Če uteži ne bi sproti popravljali, bi lahko točnejšo vrednost gradienta dobili na osnovi povprečenja  $N$  vrednosti gradienta in šele po  $N$  korakih popravili utež. Prišli bi do podobnega rezultata, kot pri metodi merjenja gradienta s perturbacijo, vendar v tem primeru perturbacija ne bi bila potrebna, ker smo pri izračunu uporabili tudi vhodni signal  $x[n]$  in predpostavko, da je kriterijska funkcija srednja kvadratična vrednost napake.

Ker je razumljivo, da bo sprotno popravljanje uteži hitreje privedlo do optimalne vrednosti, kot popravljanje vsakih  $N$  vzorcev, zgoraj opisani postopek nima smisla,

zato pogledjmo, kako se utež spreminja, kadar jo popravljamo sproti. Ker so napake pri izračunu gradienta naključne, saj so odvisne od vhodnega signala, referenčnega signala in šuma v referenčnem signalu, ne moremo vnaprej določiti, kako se bo utež spreminjala v posameznem primeru, lahko pa ugotovimo, kako se bo spreminjala v povprečju. Povprečimo obe strani enačbe (2.56):

$$\begin{aligned}\overline{w[n+1]} &= \overline{w[n]} + 2\mu \overline{\varepsilon[n]x[n]} \\ &= \overline{w[n]} + 2\mu (\overline{d[n]x[n]} - \overline{w[n]x^2[n]})\end{aligned}\quad (2.57)$$

Predpostavimo, da so spremembe  $w[n]$  in  $x^2[n]$  med seboj neodvisne. Izrazimo  $w[n]$  in  $x^2[n]$  z odstopanji od povprečne vrednosti:

$$w[n] = \overline{w[n]} + \Delta w[n]$$

in

$$x^2[n] = \overline{x^2[n]} + \Delta x^2[n] = R + \Delta x^2[n]$$

kjer sta odstopanji  $\Delta w[n]$  in  $\Delta x^2[n]$  med seboj neodvisni. Povprečje v drugi vrstici izraza (2.57) je tedaj enako:

$$\overline{w[n]x^2[n]} = \overline{w[n]} R + \overline{w[n]} \overline{\Delta x^2[n]} + \overline{\Delta w[n]} R + \overline{\Delta w[n]} \overline{\Delta x^2[n]}$$

V zgornjem izrazu so zaradi neodvisnosti vsi členi razen prvega enaki 0, zato velja:

$$\overline{w[n]x^2[n]} = R \overline{w[n]}$$

in (2.57) postane:

$$\overline{w[n+1]} = \overline{w[n]} + 2\mu (P - R \overline{w[n]})\quad (2.58)$$

V (2.10) smo izračunali optimalno utež:

$$w_{opt} = \frac{P}{R}$$

Če iz zgornjega izraza izrazimo  $P$  in to vstavimo v (2.58) dobimo po preureditvi:

$$\overline{w[n+1]} = (1 - 2\mu R)\overline{w[n]} + 2\mu R w_{opt} = k\overline{w[n]} + (1 - k)w_{opt}\quad (2.59)$$

Zgornja enačba je enaka rekurzivni enačbi za popravljanje uteži (2.23), le da v njej namesto uteži nastopajo povprečne vrednosti uteži, namesto indeksa  $m$  pa indeks  $n$ ,

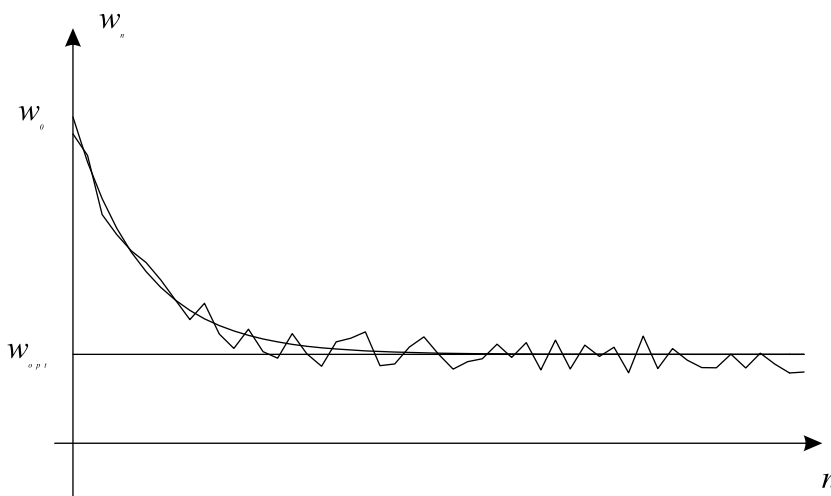
ker uteži popravljamo v vsakem koraku. To, da v tej enačbi nastopajo povprečne vrednosti uteži, pomeni, da se v posameznih primerih utež ne bo spreminjala točno po tej enačbi, v povprečju pa bo enačba pravilna. Ker ima enačba enako obliko kot (2.23), ima tudi njena rešitev enako obliko kot (2.25):

$$\overline{w[n]} = w_{opt} + k^n (\overline{w[0]} - w_{opt})$$

kar pomeni, da se utež v povprečju približuje optimalni vrednosti, kadar je  $|k| < 1$  oziroma:

$$0 < \mu < \frac{1}{R}$$

Ker uporabljamo pri LMS algoritmu namesto gradienta njegov približek, približevanje uteži svoji optimalni vrednosti odstopa od krivulje, ki bi jo dobili s točno vrednostjo gradienta. To odstopanje je za primer simulacije uporabe LMS algoritma pri šumnem referenčnim signalu prikazano na sliki 2.16.



Slika 2.16 – Spreminjanje uteži pri LMS algoritmu (sl2-14a)

### 2.6.2 Napaka pri izračunu gradienta in presežek srednje kvadratične napake

V razdelku 2.5.6 smo izračunali varianco približka gradientu, ki ga dobimo s pomočjo perturbacije uteži. Pri LMS algoritmu ni potrebna perturbacija, ker izračun gradienta



približka temelji na eni sami meritvi in dejstvu, da je kriterijska funkcija kvadratična funkcija uteži. Podobno kot v enačbi (2.39) označimo odstopanje gradienta od njegove točne vrednosti z  $\eta[n]$

$$\eta[n] = \nabla[n] - \hat{\nabla}[n]$$

V ravnotežnem stanju, ko je utež  $w$  blizu svoje optimalne vrednosti  $w_{opt}$  je gradient napake približno enak 0, oziroma:

$$\eta[n] = -\hat{\nabla}[n]$$

njegova varianca pa je enaka:

$$\overline{\eta^2[n]} = \overline{\hat{\nabla}^2[n]} = 4 \overline{\varepsilon^2[n] x^2[n]}$$

in zaradi dekorelacije vhodnega signala in signala napake v ravnotežnem stanju:

$$\overline{\eta^2[n]} = 4 \overline{\varepsilon^2[n]} \overline{x^2[n]} = 4 \xi_{min} R$$

LMS algoritem podan z enačbo (2.55) lahko sedaj zapišemo v odvisnosti od  $v$

$$v[n+1] = v[n] - \mu \hat{\nabla}[n] + \eta[n] \quad (2.60)$$

Zgornji izraz je ekvivalenten izrazu (2.42) v razdelku 2.5.8, zato lahko smiselno uporabimo tudi rezultat (2.44), ki smo ga dobili v tem razdelku:

$$\text{var}(w) = \frac{\mu^2 \overline{\eta^2[n]}}{1 - k^2} \quad (2.61)$$

in, ko vstavimo še vrednosti za  $k$  in  $\overline{\eta^2[n]}$ , dobimo:

$$\text{var}(w) = \frac{\mu \xi_{min}}{1 - \mu R} \quad (2.62)$$

Ker mora biti pri LMS algoritmu, kjer popravljamo utež v vsakem koraku  $\mu R \ll 1$ , velja:

$$\text{var}(w) = \mu \xi_{min} \quad (2.63)$$

Povprečni presežek napake LMS algoritma je torej v ravnotežnem stanju enak:

$$\overline{\xi} - \xi_{min} = \overline{v^2} R = \mu \xi_{min} R \quad (2.64)$$

Celotna neprilagoditev LMS algoritma je potem enaka:

$$M = \frac{\overline{\xi - \xi_{min}}}{\xi_{min}} = \mu R \quad (2.65)$$

Ker pri LMS popravljamo uteži za vsak vzorec, dobimo časovno konstanto LMS algoritma z izenačenjem:

$$(1 - 2\mu R)^{2n} = e^{-\frac{n}{\tau}}$$

in

$$\tau = \frac{1}{2 \ln(1 - 2\mu R)} \approx \frac{1}{4\mu R}$$

Vstavimo vrednost časovne konstante  $\tau$  v izraz za neprilagoditev (2.65) in dobimo:

$$M = \frac{1}{4\tau} \quad (2.66)$$

## 2.7 Predznačni algoritem

Algoritem za popravljanje uteži lahko še poenostavimo, če delamo konstantne popravke v smeri negativnega gradienta, tako da nas velikost gradienta ne zanima, temveč nas zanima le njegov predznak. Utež popravljamo v skladu z enačbo:

$$w[m + 1] = w[m] - \mu \text{sign}(\hat{\nabla}[m]) \quad (2.67)$$

kjer je  $\mu$  pozitivna konstanta. Pokažimo najprej, da ta algoritem pripelje do optimalne vrednosti uteži, če poznamo predznak točne vrednosti gradienta  $\nabla_m$ . Enačbo najprej zapišimo v odvisnosti od  $v$ :

$$v[m + 1] = v[m] - \mu \text{sign}(\nabla[m])$$

Vstavimo v enačbo vrednost gradienta iz (2.19):

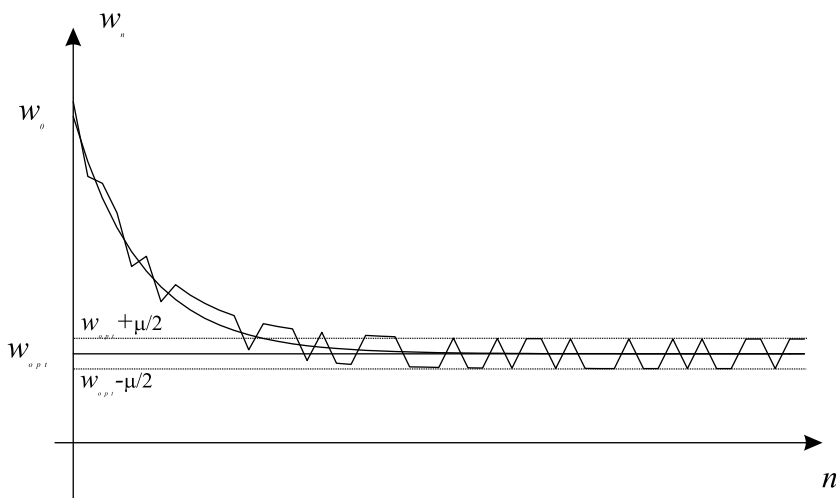
$$v[m + 1] = v[m] - \mu \text{sign}(2v[m]R)$$

in, ker je  $R$  vedno pozitiven, lahko zapišemo:

$$v[m + 1] = v[m] - \mu \text{sign}(v[m])$$

Iz zgornjega izraza je razvidno, da se bo odstopanje  $v$  od optimalne vrednosti manjšalo, kadar je pozitivno in večalo, kadar je negativno, vse dokler ne bo doseglo vrednosti

0, to je dokler ne bo utež enaka optimalni vrednosti. Ker so koraki konstantni, bo to zmanjševanje linearno odvisno od  $m$ . Vrednost uteži v mirovnem stanju se bo spreminjala v okolici  $w_{opt} \pm \mu$ , kot je to prikazano na sliki 2.17.



Slika 2.17 – Spreminjanje uteži pri predznačnem algoritmu (sl2-15)

Zaradi sprememb uteži v mirovnem stanju, bomo dobili povprečen presežek napake, v skladu z izrazom:

$$\overline{\xi - \xi_{min}} = v_m^2 R$$

ki bo v najslabšem primeru, kadar se bo  $v$  spreminjal med vrednostima 0 in  $\mu$ , enak:

$$\overline{\xi - \xi_{min}} = \frac{\mu^2 R}{2}$$

in v najboljšem primeru, ko se  $v$  spreminja med  $-\mu/2$  in  $\mu/2$ :

$$\overline{\xi - \xi_{min}} = \frac{\mu^2 R}{4}$$

Relativno odstopanje od  $\xi_{min}$  bo torej v najslabšem primeru enako:

$$M = \frac{\overline{\xi - \xi_{min}}}{\xi_{min}} = \frac{\mu^2 R}{2\xi_{min}} \quad (2.68)$$

Namesto natančne vrednosti gradienta vzamemo, podobno kot pri LMS algoritmu, njegov približek  $\hat{\nabla}[n]$  izračunan iz trenutne vrednosti napake. Njegov predznak je enak:

$$\text{sign}(\hat{\nabla}[n]) = \text{sign}(-2\mu\varepsilon[n]x[n]) = \text{sign}(\varepsilon[n])\text{sign}(x[n])$$

Utež popravljamo sproti v skladu z izrazom:

$$w[n + 1] = w[n] + \mu \operatorname{sign}(\varepsilon[n])\operatorname{sign}(x[n]) \quad (2.69)$$

Izrazimo (2.69) v odvisnosti od  $v$ :

$$v[n + 1] = v[n] + \mu \operatorname{sign}(\varepsilon[n]x[n]) \quad (2.70)$$

in upoštevajmo:

$$\varepsilon[n] = d[n] - w[n]x[n] = d[n] - w_{opt}x[n] - v[n]x[n]$$

Označimo z  $\varepsilon_{min}[n]$  signal napake, ki ga dobimo pri optimalni nastavitvi uteži:

$$\varepsilon_{min}[n] = d[n] - w_{opt}x[n]$$

in

$$\varepsilon[n] = \varepsilon_{min}[n] - v[n]x[n]$$

Vstavimo zgornji izraz v (2.70). Dobimo:

$$v[n + 1] = v[n] + \mu \operatorname{sign}(\varepsilon_{min}[n]x[n] - v[n]x^2[n])$$

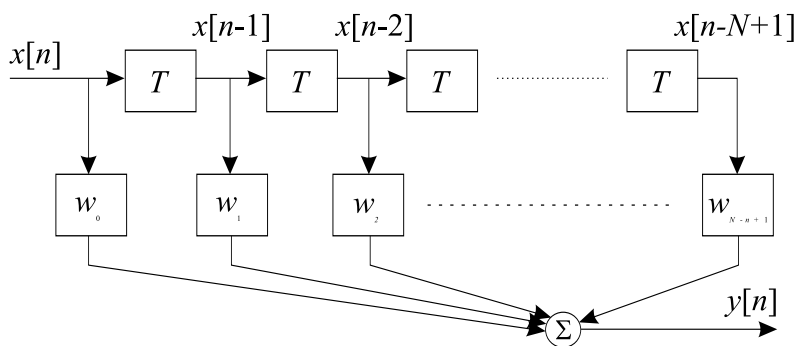
Če bi bil signal napake pri optimalni nastavitvi uteži (residualni šum) enak 0, bi bili popravki uteži v skladu z zgornjim izrazom vedno v pravilni smeri in utež bi se spreminjala v okolici  $w_{opt} \pm \mu$ . Kadar residualni šum ni enak 0, lahko nastopijo popravki v napačno smer. Do napačnega popravka pride kadar velja  $\varepsilon_{min}[n]x[n] > v[n]x^2[n]$ .

Zaradi popravkov uteži v napačno smer, bo povečanje srednje kvadratične vrednosti napake večje, kot bi ga dobili v skladu z izrazom (2.68). Verjetnost napačnega popravka je odvisna od verjetnostne porazdelitve amplitude residualnega šuma. Bolj ko se vrednost uteži razlikuje od optimalne vrednosti, manjša je verjetnost napačnega popravka, zato bo vrednost uteži ostajala v bližini optimalne vrednosti.

### 3 Adaptivno transverszalno sito

V prejšnjem poglavju smo natančneje obravnavali adaptivni sistem z eno utežjo in algoritme za adaptivno nastavljanje te uteži, ki minimizirajo srednjo kvadratično vrednost napake  $\xi$ , ki smo jo izbrali za kriterijsko funkcijo. V tem poglavju bomo sistem posplošili in kot enoto za obdelavo signalov uporabili transverszalno sito. Da bi lahko obravnavali adaptivno transverszalno sito si moramo najprej ogledati transverszalno sito s konstantnimi utežmi.

#### 3.1 Transverzhalno sito



Slika 3.1 – Transverzhalno sito s konstantnimi utežmi (sl3-1)

Transverzhalno sito s konstantnimi utežmi je prikazano na sliki 3.1. Sito sestavlja veriga zakasnilnih celic. Na vhod te verige pripeljemo vhodni signal  $x[n]$ . Ker vsaka celilica zadrži vrednost signala za en vzorčni interval  $T$ , je signal na njenem izhodu zakasnen za en vzorec glede na signal na njenem izhodu. Na zaporednih izhodih pomnilniških celic tako dobimo zakasnjene signale  $x[n-1]$ ,  $x[n-2]$ ,  $x[n-3]$ ,...

Posamezne izhode zakasnilnih celic množimo s konstantnimi utežmi  $w_k$ , tako, da

nezakasnjjen signal množimo z utežjo  $w_0$ , za en vzorec zakasnjjen signal z utežjo  $w_1$  in tako naprej. Transverzalno sito z  $N - 1$  zakasnilnimi celicami ima tako  $N$  uteži in  $N$  imenujemo dolžina transverzalnega sita. Izhodni signal transverzalnega sita  $y[n]$  dobimo s seštevanjem vseh zakasnenih in uteženih signalov:

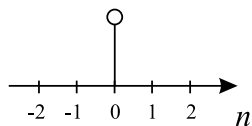
$$y[n] = w_0x[n] + w_1x[n-1] + w_2x[n-2] + \dots + w_{N-1}x[n-N+1] = \sum_{m=0}^{N-1} w_mx[n-m] \quad (3.1)$$

### 3.1.1 Odziv transverzalnega sita na enotin impulz

Linearne časovno nespremenljive sisteme običajno opisujemo z odzivom sistema na enotin impulz  $\delta[n]$ . Enotin impulz je pri časovno diskretnih sistemih definiran kot:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

in je prikazan na sliki 3.2



Slika 3.2 – Enotin impulz (sl3-2)

Odziv na sistema na enotin impulz  $h[n]$  je izhodni signal, ki ga dobimo, če damo na vhod sistema enotin impulz. V izrazu(3.1) zamenjamo  $x[n]$  z  $\delta[n]$  in  $y[n]$  z  $h[n]$  in dobimo:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} w_m\delta[n-m] \quad (3.3)$$

Ker je  $\delta[n-m]$  različen od 0 le pri  $n = m$ , lahko zapišemo:

$$h[n] = w_n \quad (3.4)$$

Vidimo, da so zaporedni vzorci odziva na enotin impulz enaki utežem transverzalnega sita. Ker je pri končni dolžini sita število uteži končno, je tudi odziv na enotin impulz končen, kot je to prikazano na sliki 3.3.

Če sedaj v skladu z izrazom (3.4) enačbi (3.1) nadomestimo  $w_m$  s  $h[m]$  dobimo:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m] \quad (3.5)$$



Slika 3.3 – Odziv transverzalnega sita na enotin impulz (sl3-3)

Vsota v zgornjem izrazu imenujemo tudi diskretna konvolucija. Izhodni signal transverzalnega sita je torej enak konvoluciji vhodnega signala  $x[n]$  in odziva sita na enotin impulz  $h[n]$ , kar poenostavljeno zapišemo kot:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (3.6)$$

Zaradi končnega odziva imenujemo transverzalno sito tudi sito s končnim odzivom oziroma FIR (Finite Impulse Response) sito.

### 3.1.2 Prevaljalna funkcija transverzalnega sita

Pri analognih linearnih in časovno nespremenljivih sistemih smo Fourierjev transform odziva na enotin impulz imenovali prevaljalna funkcija sistema. Da bi lahko naredili Fourierov transform, predpostavimo enakomerno vzorčenje in predstavimo odziv na enotin impulz v časovnem prostoru  $h_\delta(t)$  z nizom enotinih impulzov:

$$h_\delta(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\delta(t - nT) \quad (3.7)$$

kjer je  $T$  vzorčni interval in je  $\delta(t)$  Diracov enotin impulz. Prevaljalna funkcija  $H_\delta(\omega)$  je potem enaka:

$$H_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\delta(t - nT)e^{-j\omega t} dt \quad (3.8)$$

Upoštevajmo še, da je integral vsote enak vsoti integralov:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega nT} \quad (3.9)$$

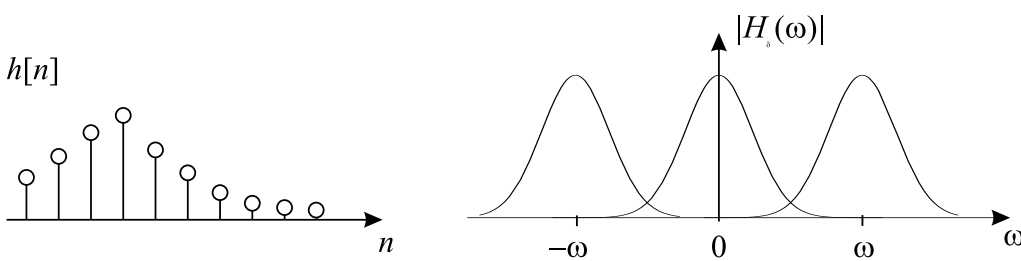
in dobimo:

$$H_\delta(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\omega nT} \quad (3.10)$$

Dobili smo prevajalno funkcijo transverzalnega sita v odvisnosti od krožne frekvence  $\omega$ . Prevajalna funkcija je periodična po frekvenci  $\omega$  s periodo enako vzorčni frekvenci:

$$\omega_{vz} = 2\pi f_{vz} = 2\pi/T \quad (3.11)$$

Primer odziva na enotin impulz  $h[n]$  in prevajalne funkcije  $H_\delta(\omega)$  je prikazan na sliki 3.4.



Slika 3.4 – Primer odziva na enotin impulz  $h[n]$  in prevajalna funkcije  $H_\delta(\omega)$  (sl3-4)

V časovno diskretnih sistemih uporabljamo običajno namesto krožne frekvence  $\omega$  normirano krožno frekvenco  $\Omega$ :

$$\Omega = T\omega \quad (3.12)$$

Prevajalno funkcijo v odvisnosti od normirane frekvence dobimo, če v izrazu (3.11) nadomestimo  $T\omega$  z  $\Omega$ . Dobimo:

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j\Omega n} \quad (3.13)$$

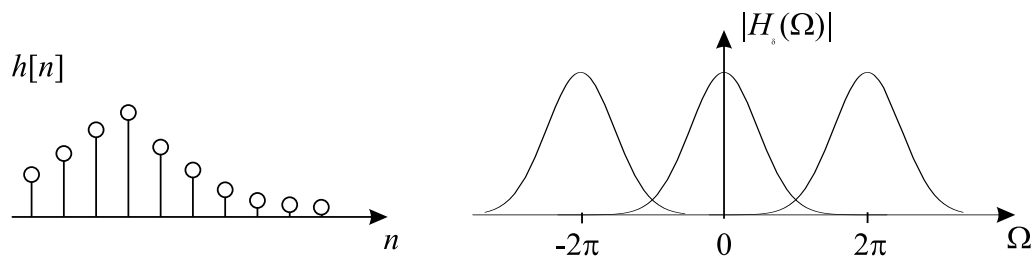
Vsoto v zgornjem izrazu imenujemo tudi časovno diskretni Fourierov transform (TDFT), zato lahko zapišemo:

$$H(\Omega) = \text{TDFT}(h[n]) = \text{TDFT}(w_n) \quad (3.14)$$

Prevajalna funkcija  $H(\Omega)$  je periodična s periodo  $2\pi$ . Vidimo tudi, da je prevajalna funkcija transverzalnega sita enaka časovno diskretnemu Fourierovemu transformu uteži. Prevajalna funkcija  $H(\Omega)$  za primer iz slike 3.4 je prikazan na sliki 3.5.

Videli smo, da je izhodni signal  $y[n]$  enak konvoluciji vhodnega signala in odziva na enotin impulz. Podobno kot pri časovno zveznih sistemih velja tudi pri časovno diskretnih sistemih, da konvolucija v časovnem prostoru predstavlja produkt v frekvenčnem





Slika 3.5 – Primer odziva na enotin impulz  $h[n]$  in prevajalne funkcije  $H(\Omega)$  (sl3-5)

prostoru. TDFT izhodnega signala je tako enak produktu prevajalne funkcije in TDFT vhodnega signala, kar zapišemo v obliki:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (3.15)$$

### 3.1.3 Vektorski zapis

Pri transversalnem situ imamo opravka z  $N$  utežmi. Zaradi enostavnejšega zapisa jih lahko predstavimo s stolpičnim vektorjem:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

V trenutku  $n$  je v transverzalnem situ prisotnih  $n$  vzorcev signala, ki jih, podobno kot uteži, predstavimo s stolpičnim vektorjem:

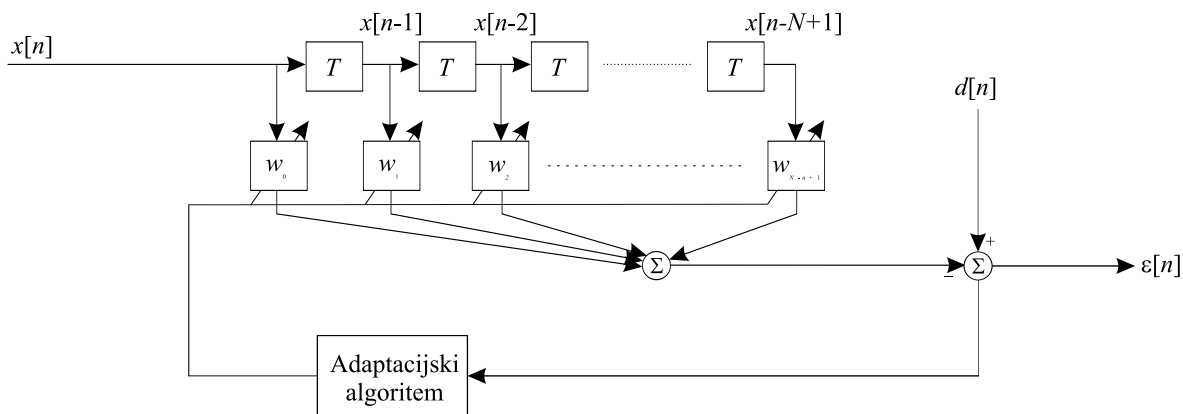
$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ \vdots \\ x[n-N+1] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Izhodni signal  $y[n]$ , ki ga dobimo v skladu z izrazom (3.5), kot konvolucijo vhodnega signala in uteži, lahko sedaj zapišemo s skalarnim produktom vektorjev:

$$y[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] \quad (3.18)$$

Kjer je  $s^T$  označena transpozicija, to je zamenjava vrstic in stolpcev matrike (vektorja), ki transformira stolpični vektor v vrstičnega.

### 3.1.4 Kriterijska funkcija



Slika 3.6 – Adaptivni sistem s transverzalnim sitom (sl3-6)

Adaptivni sistem na sliki 3.6 je enak kot sistem, ki smo ga obravnavali v prejšnjem poglavju, le da namesto z eno samo utežjo, tu preoblikujemo signal s transverzalnimi

sitom z  $N$  utežmi, ki smo jih predstavili z vektorjem  $\mathbf{w}$ . Signal napake je sedaj enak:

$$\varepsilon[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] = d[n] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w} \quad (3.19)$$

kvadrat signala napake pa je:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2[n] &= (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n])(d[n] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}) \\ &= d^2[n] + \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w} - 2d[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Za kriterijsko funkcijo vzamemo zopet srednjo kvadratično vrednost napake:

$$\xi = \overline{\varepsilon^2[n]} = \overline{\mathbf{w}^T \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}} - 2\overline{d[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}} + \overline{d^2[n]} \quad (3.21)$$

Zaradi boljše preglednosti definirajmo:

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]} \quad (3.22)$$

in

$$\mathbf{p} = \overline{d[n] \mathbf{x}^T[n]} \quad (3.23)$$

kjer je  $\mathbf{R}$  kvadratna avtokorelacijska matrika vhodnega signala dimenzije  $N \times N$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{N-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdot & \cdot & \cdot & r_{N-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & \cdot & \cdot & \cdot & r_0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$\mathbf{p}$  stolpni korelacijski vektor dolžine  $N$ :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Elementi matrike  $\mathbf{R}$  so vrednosti avtokorelacijske funkcije signala:

$$r_m = \overline{x[n]x[n-m]} \quad (3.26)$$

elementi vektorja  $\mathbf{p}$  pa so vrednosti križne korelacije:

$$p_m = \overline{d[n]x[n-m]} \quad (3.27)$$

Srednjo kvadratično vrednost napake v izrazu(3.21) lahko sedaj zapišemo v bolj pregledni obliki:

$$\xi = \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w} + \overline{d^2[n]} \quad (3.28)$$

Dobili smo izraz za srednjo kvadratično vrednost napake sistema s transverzalnim sitom. Enačba je enako kot pri sistemu z eno utežjo (2.8), le da tu namesto ene same uteži  $w$  nastopa vektor uteži  $\mathbf{w}$ , namesto avtokorelacije  $R$  avtokorelacijska matrika  $\mathbf{R}$  in namesto korelacije  $P$  korelacijski vektor  $\mathbf{p}$ .

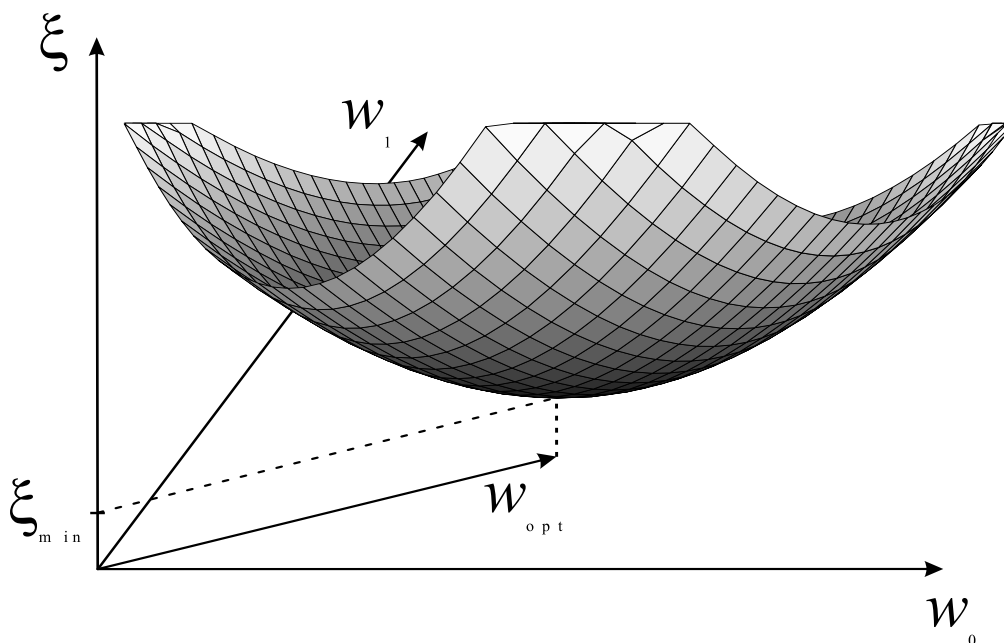
Srednja kvadratična vrednost napake  $\xi$  je sedaj kvadratična funkcija vektorja uteži, zato predstavlja  $N$  dimenzionalni paraboloid. Zaradi večje nazornosti si oglejmo, kako izgleda izpisana enačba (3.28) za primer transverzalnega sita z dvema utežmi ( $N = 2$ ):

$$\xi = [w_0 \ w_1] \begin{bmatrix} r_0 & r_1 \\ r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - 2 [p_0 \ p_1] \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} + \overline{d^2[n]} \quad (3.29)$$

Če zmnožimo vektorje in matrike v zgornjem izrazu dibimo:

$$\xi = r_0(w_0^2 + w_1^2) + 2r_1(w_0w_1) - 2(p_0w_0 + p_1w_1) + \overline{d^2[n]} \quad (3.30)$$

Vidimo, da je  $\xi$  pri konstantni uteži  $w_1$  kvadratična funkcija uteži  $w_0$ , Pri konstantni uteži  $w_0$  pa je kvadratična funkcija uteži  $w_1$ . Če predstavimo vektor uteži  $\mathbf{w}$  s točko v ravnini  $(w_0, w_1)$ , predstavlja  $\xi$  paraboloid, kot je to prikazano na sliki 3.7.



Slika 3.7 – Geometrijska predstavitev kriterijske funkcije za sistem z dvema utežmi (sl3-7)

Ker je kriterijska funkcija kvadratična ima en sam globalni minimum. Minimum je v točki, kjer je gradient (naklon) funkcije enak 0. Gradient je v večdimenzionalnem sistemu stolpčni vektor odvodov po posameznih utežeh:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} = 2(\mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p}) \quad (3.31)$$

Optimalni vektor uteži  $\mathbf{w}_{opt}$  je torej tisti, pri katerem je gradient enak  $\mathbf{0}$ .

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_{opt} - \mathbf{p} = 0 \quad (3.32)$$

in, če matrika  $\mathbf{R}$  ni singularna:

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (3.33)$$

Minimalno vrednost srednje kvadratične vrednosti napake dobimo, če optimalno vrednost uteži vstavimo v izraz za srednjo kvadratično vrednost napake (3.28):

$$\xi_{min} = \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{R} \mathbf{w}_{opt} - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w}_{opt} + \overline{d^2[n]} \quad (3.34)$$

Po preureditvi in upoštevanju simetričnosti avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T &= \mathbf{R} \\ (\mathbf{R}^{-1})^T &= \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

dobimo:

$$\xi_{min} = \overline{d^2[n]} - \mathbf{p}^T \mathbf{w}_{opt} \quad (3.36)$$

kar je ekvivalentno izrazu (2.11), ki smo ga dobili za sistem z eno utežjo.

**Primer.** Oglejmo si sedaj primer, ki smo ga obravnavali že v razdelku 2.2, za sistem z dvema utežmi:

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(\Omega n + \Phi) \\ d[n] &= B \cos(\Omega n) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Da bi lahko izračunali optimalno utež v skladu z izrazom (3.33), moramo izračunati najprej elemente vektorja  $\mathbf{p}$ . Izračunamo jih po enačbi (3.27):

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{d[n]x[n]} \\ \overline{d[n]x[n-1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (AB/2) \cos \Phi \\ (AB/2) \cos(\Omega - \Phi) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Nato moramo izračunati inverzno vrednost korelacijske matrike  $\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{r_0^2 - r_1^2} \begin{bmatrix} r_0 & -r_1 \\ -r_1 & r_0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

kjer je:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{A^2}{2} \\ r_1 &= \frac{A^2}{2} (\cos \Omega) \end{aligned} \quad (3.40)$$

in

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{2}{A^2 \sin^2 \Omega} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \Omega \\ -\cos \Omega & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Vstavimo vrednosti  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{R}^{-1}$  v (3.27) in dobimo optimalni vektor uteži:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{opt} &= \frac{B}{A \sin^2 \Omega} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \Omega \\ -\cos \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Phi \\ \cos(\Omega - \Phi) \end{bmatrix} \\ &= \frac{B}{A \sin^2 \Omega} \begin{bmatrix} \cos \Phi - \cos(\Omega - \Phi) \cos \Omega \\ \cos(\Omega - \Phi) - \cos \Phi \cos \Omega \end{bmatrix} \\ &= \frac{B}{A \sin \Omega} \begin{bmatrix} \sin(\Omega - \Phi) \\ \sin \Phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Minimalno vrednost srednje kvadratične vrednosti napake dobimo, če optimalni vektor uteži vstavimo v izraz (3.36). Dobimo:

$$\begin{aligned} \xi_{min} &= \frac{B^2}{2} - \frac{AB}{2} [\cos \Phi \quad \cos(\Omega - \Phi)] \frac{B}{A \sin \Omega} \begin{bmatrix} \sin(\Omega - \Phi) \\ \sin \Phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{B^2}{2} - \frac{B^2}{2 \sin \Omega} (\sin(\Omega - \Phi) \cos \Phi + \cos(\Omega - \Phi) \sin \Phi) \\ &= \frac{B^2}{2} - \frac{B^2 \sin \Omega}{2 \sin \Omega} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vidimo, da je srednja kvadratična vrednost napake pri optimalni nastavitvi vektorja uteži v zgornjem primeru enaka 0, kar pomeni, da je signal na izhodu sistema natančno enak referenčnemu signalu, oziroma, da sistem z dvema utežmi zadošča za spremembo faze in amplitude signala.

Ta rezultat je lahko zavajajoč, ker na prvi pogled izgleda, da predstavlja sistem z dvema utežmi fazni sukelnik s poljubnim faznim zasukom  $\Phi$ . Vendar, če si natančneje ogledamo optimalni vektor uteži, ki smo ga dobili kot rešitev v (3.42), vidimo, da je ta odvisen od frekvence  $\Omega$ , kar pomeni, da bi moral imeti sistem pri drugi frekvenci  $\Omega$  drugačno nastavitvev uteži za enak fazni zasuk. Razumljivo je, da s transverzalnim sitom z dvema utežmi ne moremo narediti faznega sukelnika, saj iz teorije signalov

vemo, da bi moral imeti ta neskončno dolg odziv, kar pa pomeni, da bi moralo imeti transverzalno sito neskončno uteži.

## 3.2 Gradientni postopki

### 3.2.1 Spust po največji strmini

Za razliko od sistema z eno utežjo, je v skladu z (3.31) pri transverzalnem situ gradient vektor, ki kaže v smer z največjo strmino kriterijske funkcije. Ker je kriterijska funkcija kvadratična in ima samo en globalen minimum, lahko dosežemo optimalno vrednost vektorja uteži in s tem minimalno srednjo kvadratično vrednost napake tako, da vektor uteži  $\mathbf{w}$  popravljamo v negativni smeri gradienta:

$$\mathbf{w}[m + 1] = \mathbf{w}[m] - \mu \nabla[m] \quad (3.44)$$

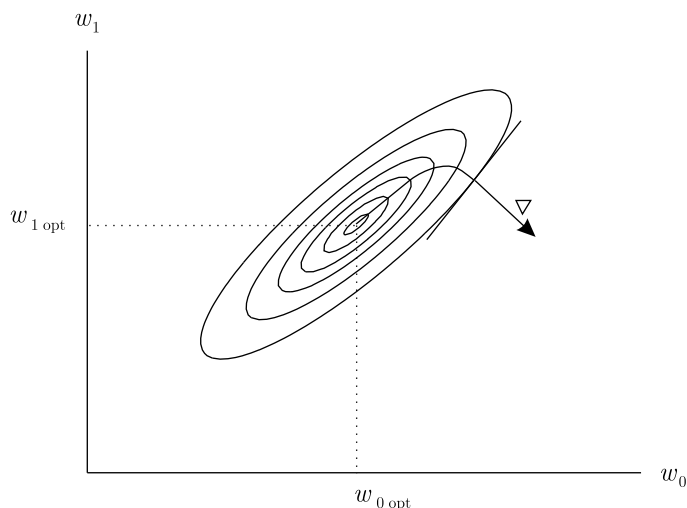
Ker vektor uteži popravljamo v nasprotni smeri največje strmine imenujemo ta postopek tudi spust po največji strmini (steepest descent). Gradient pa ne kaže nujno v smeri optimalnega vektorja uteži, zato optimalne vrednosti s popravkom v smeri negativnega gradienta ni mogoče doseči v enem koraku, ne glede na izbiro  $\mu$ , temveč se moramo optimalni vrednosti približevati postopoma.

Spust po največji strmini lahko grafično predstavimo za sistem z dvema utežmi, kjer je vektor uteži tu dvodimenzionalen. Karakteristično funkcijo predstavimo v ravnini  $(w_0, w_1)$  z izohipsami, kot je to prikazano na sliki 3.8. Izohipse so krivulje, ki povezujejo točke z isto vrednostjo  $\xi$  in predstavljajo prečne preseke kriterijske funkcije prikazane na sliki 3.8. Izohipse so pri kvadratični funkciji elipse, smer gradienta pa je vedno pravokotna na smer tangente. Le v posebnem primeru, kadar sta obe osi elipse enako dolgi (krog), kaže gradient proti optimalni vrednosti uteži, drugače pa se ji približujemo po neki krivulji.

Ne da bi se spuščali v izpeljave, navedimo nekaj osnovnih lastnosti opisanega postopka:

1. Adaptacija poteka neodvisno vzdolž vsake glavne osi elipse (N - dimenzionalnega elipsoida).





Slika 3.8 – Spust po največji strmini za sistem z dvema utežmi (sl3-8)

2. Hitrost in konvergenca adaptacije je odvisna od izbire adaptacijskega faktorja  $\mu$ . Faktor geometrijske vrste, po kateri se utež približuje svoji optimalni vrednosti vzdolž posameznih osi je enak:

$$k_n = 1 - 2\mu\lambda_n \quad (3.45)$$

kjer je  $\lambda_n$   $n$ -ta lastna vrednost avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ .

3. Adaptacija je konvergentna, kadar je konvergentna vzdolž vseh glavnih osi, oziroma kadar je izpolnjen pogoj:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}} \quad (3.46)$$

kjer je  $\lambda_{max}$  največja lastna vrednost vhodne avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ . Ker vedno velja  $\lambda_{max} < Nr_0$  je zadosten pogoj za konvergenco:

$$0 < \mu < \frac{1}{Nr_0} \quad (3.47)$$

kjer je  $N$  dolžina transverzalnega sita in  $r_0$  moč vhodnega signala.

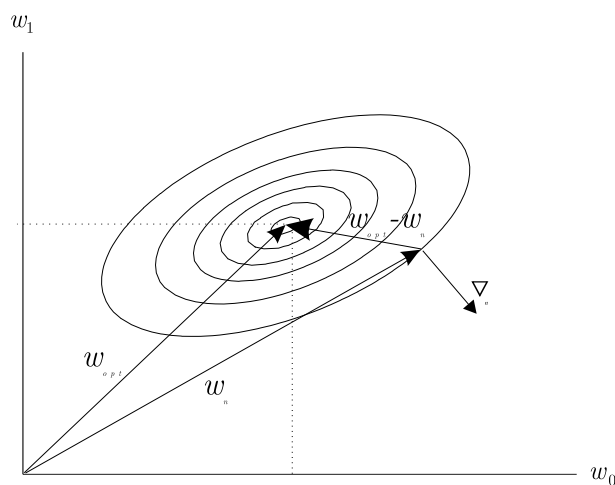
4. Hitrost in konvergenca adaptacijskega postopka sta močno odvisna od lastnosti vhodne avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ , to je od statističnih lastnosti vhodnega signala. Adaptacija je najhitrejša, kadar so vse lastne vrednosti  $\lambda_n$  enake. Kadar je

močnostni spekter vhodnega signala raven (bel), je vhodna avtokorelacijska matrika diagonalna, njene lastne vrednosti pa so vse enake povprečni moči signala.

### 3.2.2 Newtonov postopek

Največja pomanjkljivost spusta po največji strmini opisanega v prejšnjem razdelku je v tem, da vektorja uteži  $\mathbf{w}$  ne popravljamo v smeri optimalne vrednosti temveč v smeri največjega naklona. Adaptacija tako poteka vzdolž glavnih osi N-dimenzionalnega elipsoide z različnimi hitrostmi, vse pa nastavljamo z enim adaptacijskim faktorjem  $\mu$ .

Pomanjkljivost spusta po največji strmini odpravlja Newtonov postopek, pri katerem popravljamo vektor uteži neposredno v smeri njegove optimalne vrednosti, to je v smeri vektorja  $\mathbf{w} - \mathbf{w}_{opt}$ , kot je to prikazano na sliki 3.9. Rešitev v enem koraku



Slika 3.9 – Smer poravljanja uteži pri Newtonovem postopku (sl3-9)

dobimo po enačbi (3.48) za primer  $\mu = \frac{1}{2}$  :

$$\mathbf{w}[m + 1] = \mathbf{w}[m] - 2\mu(\mathbf{w}[m] - \mathbf{w}_{opt}) \quad (3.48)$$

V izraz (3.48) vstavimo rešitev za optimalno utež  $\mathbf{w}_{opt}$  iz (3.33) in dobimo:

$$\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - 2\mu(\mathbf{w}[m] - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}) = \mathbf{w}[m] - 2\mu\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{w}[m] - \mathbf{p}) \quad (3.49)$$

Če upoštevamo, da je zadnji člen v oklepaju (3.49) enak polovici gradienta kriterijske funkcije (3.31), dobimo:

$$\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - \mu\mathbf{R}^{-1}\nabla[m] \quad (3.50)$$

Zgornji izraz predstavlja Newtonov adaptacijski postopek. Vektor uteži tu popravljamo direktno v smeri optimalne vrednosti. Vektor smeri dobimo tako, da gradient na levi pomnožimo z inverzno avtokorelacijsko matriko  $\mathbf{R}^{-1}$  in ga s tem zasučemo v smeri optimalne vrednosti uteži. Slabost tega postopka je predvsem v tem, da moramo poznati inverzno vrednost vhodne avtokorelacijske matrike. Ker te običajno ne poznamo vnaprej, moramo, podobno kot pri gradientu, izračunati njeno približno vrednost na osnovi meritev vhodnega signala.

**Konvergenca Newtonovega postopka:** S preureditvijo izraza (3.48) dobimo:

$$\mathbf{w}[m+1] = (1 - 2\mu)\mathbf{w}[m] + 2\mu\mathbf{w}_{opt} \quad (3.51)$$

in z

$$k = 1 - 2\mu \quad (3.52)$$

$$\mathbf{w}[m+1] = k\mathbf{w}[m] + (1 - k)\mathbf{w}_{opt} \quad (3.53)$$

Zgornja enačba je ekvivalentna enačbi (2.23), torej se utež približuje optimalni vrednosti po geometrijskem zaporedju:

$$\mathbf{w}[m] = \mathbf{w}_{opt} + k^m(\mathbf{w}[0] - \mathbf{w}_{opt}) \quad (3.54)$$

in postopek je konvergenten za vrednosti  $-1 < k < 1$ , pri  $k = 0$  pa dobimo adaptacijo v enem koraku.

### 3.2.3 Izračun gradienta in inverzne avtokorelacijske matrike

Pri spustu po največji strmini moramo v vsakem koraku adaptacije poznati gradient, pri Newtonovem postopku pa moramo poznati tudi vrednost inverzne avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ .

Ker točnega gradienta ne poznamo lahko izračunamo njegovo približno vrednost na osnovi meritve s perturbacijo uteži. Zaradi perturbacije uteži se poveča srednja kvadratična vrednost napake. Ravno tako se povečuje napaka zaradi neprilagoditve uteži, če povečujemo hitrost adaptacije z večanjem adaptacijskega faktorja. Pri tem je pomembno dejstvo, da je čas adaptacije pri enakem presežku srednje kvadratične napake sorazmeren številu uteži, to je dolžini transverzalnega sita. To velja tako za spust po največji strmini kot za Newtonov postopek.

Ker je hitrost adaptacije po Newtonovem postopku veliko večja kot pri spustu po največji strmini, je dobro če vnaprej poznamo statistične lastnosti vhodnega signala, to je njegovo avtokorelacijsko matriko, oziroma njeno inverzno vrednost. Pri signalih, ki se jim statistika počasi spreminja pa je celo bolje, če poznamo avtokorelacijsko matriko (oziroma njeno inverzno vrednost) izračunano na osnovi kratkoočnega povprečja signala. Obstajajo tudi rekurzivni postopki, s pomočjo katerih lahko sproti računamo kratkotrajno avtokorelacijsko matriko na osnovi njene stare vrednosti in novih vzorcev signala. Takšen postopek uporablja tudi RLS algoritem, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.

## 3.3 Večdimenzionalni LMS algoritem

Podobno kot pri sistemu z eno utežjo, lahko tudi pri sistemu z več utežmi namesto gradienta uporabimo kar njegovo približno vrednost izračunano iz trenutne vrednosti napake:

$$\varepsilon[n] = d[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}[n] \quad (3.55)$$

$$\hat{\nabla}[n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon^2}{\partial w_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \epsilon^2}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} = -2\epsilon[n]\mathbf{x}[n] \quad (3.56)$$

in uteži popravljamo v vsakem koraku po rekurzivni enačbi:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + 2\mu\epsilon[n]\mathbf{x}[n] \quad (3.57)$$

Zgornja enačba predstavlja LMS algoritem za sistem z več utežmi. Podobno kot v enodimenzionalnem primeru, se ta v povprečju obnaša enako kot postopek iz katerega je bil izpeljan, to je spust po največji strmini. Za konvergenco potreben in zadosten pogoj je torej:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{maks}} < \frac{1}{Nr_0} \quad (3.58)$$

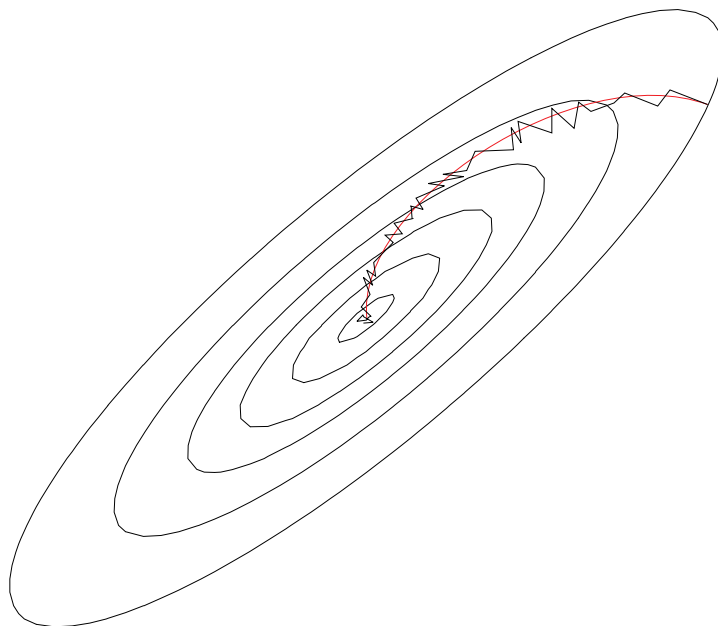
in adaptacija poteka ločeno vzdolž glavnih osi  $N$ -dimenzionalnega elipsoida. Ker ni potrebno računati kratkoročnega povprečja gradienta in spreminjamo uteži v vsakem koraku, je adaptacija hitrejša, kot bi jo dobili, če bi gradient računali s perturbacijo uteži. Poleg tega pri LMS algoritmu tudi ni presežka srednje kvadratične vrednosti napake zaradi perturbacije. Ker temeljijo popravki uteži na približni vrednosti gradienta, niso vedno v smeri gradienta. Krivulja približevanja uteži optimalni vrednosti zato odstopa od idealne krivulje, kot je to za dvodimenzionalen primer prikazano na sliki 3.10.

### 3.3.1 Krivulja učenja , hitrost adaptacije in presežek napake

Krivulja učenja predstavlja zaporedje kvadratov napak  $\epsilon[n]^2$  in je določena s potekom adaptacije uteži sita  $\mathbf{w}[n]$  v vseh  $N$  dimenzijah:

$$\epsilon^2[n] = \xi_{min} + (\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{opt})^T R (\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{opt}) \quad (3.59)$$

Podobno, kot smo izračunali napako gradienta in presežek srednje kvadratične napake za enodimenzionalno sito, lahko postopek ponovimo tudi za večdimenzionalni



Slika 3.10 – Adaptacija vektorja uteži pri LMS algoritmu (sl3-10)

primer. Z namenim, da ne presežemo okvir predavanj, povzemimo le rezultate analize večdimenzionalnega LMS algoritma. Krivulja učenja ima v povprečju eksponentni potek. Hitrost upadanja napake določa konstanta  $\tau_{LMS}$ , ki v povprečju pomeni število iteracij po katerem presežek napake upade za faktor  $e$ .

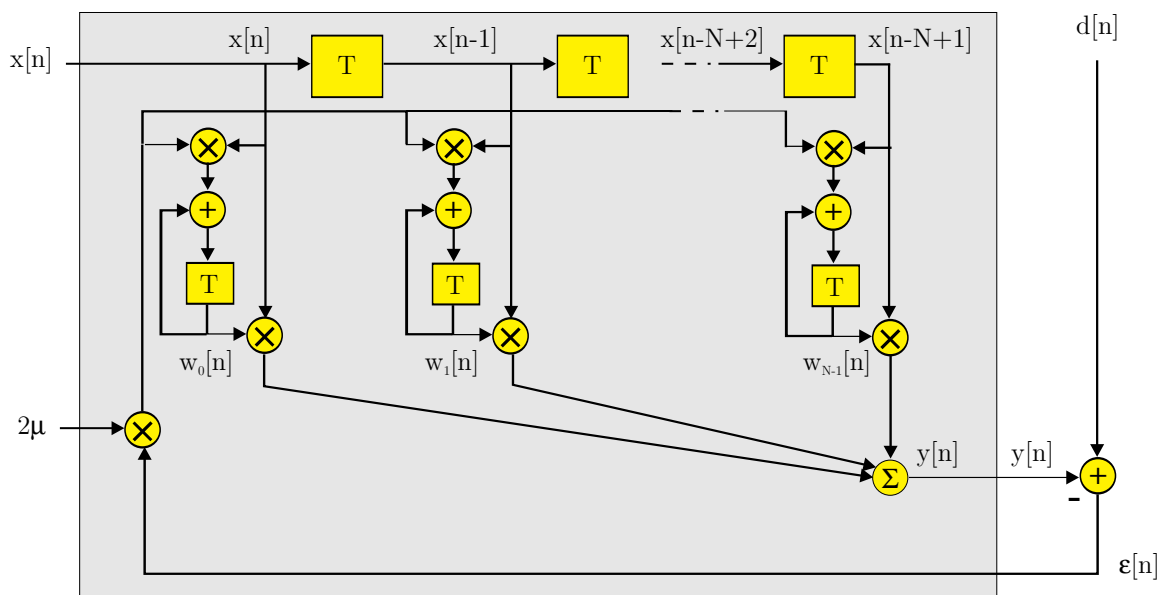
$$\tau_{LMS} = \frac{1}{4\mu\lambda_{min}} \quad (3.60)$$

Zaradi nenatančnosti gradienta nastopa variacija uteži tudi v okolici optimalne vrednosti. Presežek napake v stacionarnem stanju podaja enačba:

$$\xi_{LMS} = \mu\xi_{min}Nr_0 \quad (3.61)$$

### 3.3.2 Implementacija LMS adaptivnega sita

Adaptivno LMS transverzalno sito se zelo pogosto uporablja v praktičnih sistemih za obdelavo signalov. Razlog za to je računaska nezahtevnost algoritma in s tem izjemno preprostost izvedba digitalnega adaptivnega sita. Slika 3.11 podaja model LMS sita dolžine  $N$ , ki ga lahko realiziramo z  $2N - 1$  zakasnilnimi elementi,  $2N$  množilniki in  $2N + 1$  seštevalniki.



Slika 3.11 – Transverzhalno LMS sito (sl3-10-1)

### 3.3.3 Normalizirani LMS algoritem

Pri LMS algoritmu moramo skrbeti za primerno nastavitve adaptacijske konstante  $\mu$  tako, da je izpolnjen tudi pogoj za konvergenco postopka (3.58). Vrednost adaptacijske konstante vpliva na hitrost adaptacije kot tudi na presežek napake tako, da

- hitrost adaptacije narašča z velikostjo adaptacijske konstante (3.61) in
- presežek napake narašča z velikostjo adaptacijske konstante (3.60)

Želji po čim hitrejši adaptaciji in čim manjšem presežku sta nasprotujoči in zahtevata kompromisno izbiro velikosti adaptacijske konstante. V obeh kriterijih nastopajo tudi lastnosti vhodnega signala, ki jih podaja avtokorelacijska matrika  $\mathbf{R}$ , ki vpliva na izbiro adaptacijske konstante.

Pri normaliziranem LMS algoritmu izbiramo adaptacijsko konstanto  $\mu$  neodvisno od lastnosti vhodnega signala:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \frac{\mu}{\alpha + \mathbf{x}[n]^T \mathbf{x}[n]} \varepsilon[n] \mathbf{x}[n] \quad (3.62)$$

Konstanta  $\alpha$  preprečuje računanje nedoločenega izraza za primer, če ni signala na vhodu adaptivnega sita.

### 3.4 RLS algoritem

V dosedaj obravnavanih algoritmi smo za kriterijsko funkcijo uporabili pričakovano vrednost kvadrata signala napake, kar je pri stacionarnih signalih enako povprečni vrednosti.

$$\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^2[n] \quad (3.63)$$

Približek kriterijske funkcije izračunamo na osnovi povprečja končnega števila  $N$  vzorcev, pri LMS algoritem pa smo namesto kratkoročnega povprečja upoštevali samo trenutno vrednost napake  $N = 1$ .

Namesto povprečne vrednosti kvadrata napake lahko izberemo za kriterijsko funkcijo eksponentno uteženo vsoto kvadratov napak:

$$\xi_{RLS}[n] = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \epsilon[i]^2 = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (d[i] - \mathbf{w}^T[n] \mathbf{x}[i])^2 \quad (3.64)$$

Kriterijsko funkcijo lahko računamo rekurzivno na osnovi utežene pretekle vrednosti in nove vrednosti kvadrata napake:

$$\xi_{RLS}[n] = \lambda \xi_{RLS}[n-1] + \epsilon[n]^2 \quad (3.65)$$

Vrednost konstante  $\lambda$  leži med 0 in 1. Pretekle vrednosti napak se upoštevajo z utežjo, ki eksponentno upada z zakasnitvijo. Takšna kriterijska funkcija upošteva le končno zgodovino signala, kar je prednost pri nestacionarnih signalih. Konstanto  $\lambda$  imenujemo tudi faktor pozabljanja. Efektivna dolžina eksponentnega okna je odvisna od konstante pozabljanja  $\lambda$ :

$$N_\lambda = \frac{1}{1 - \lambda}$$

#### 3.4.1 Minimizacija kriterijske funkcije

Izraz za kriterijsko funkcijo 3.64 najprej preuredimo:

$$\xi_{RLS}[n] = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (d[i]^2 d[i] - \mathbf{w}^T[n] x[i] + (\mathbf{w}^T[n] x[i])^2)^2 \quad (3.66)$$

Poiščemo pogoj za minimizacijo utežene vsote kvadratov napak:

$$\frac{d\xi_{RLS}[n]}{d\mathbf{w}[n]} = 0 \quad (3.67)$$



$$\sum_{i=0}^n (\lambda^{n-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{x}[i]^T) \mathbf{w}_{opt}[n] = \sum_{i=0}^n (\lambda^{n-i} d[i] \mathbf{x}[i]^T) \quad (3.68)$$

Prvi člen na levi strani 3.70 je utežena avtokorelacijska matrika vhodnega signala, izraz na desni strani enačbe pa je uteženi vektor križne korelacije vektorja vhodnega signala in zelenega signala  $d[n]$ :

$$\mathbf{R}[n] = \sum_{i=0}^n (\lambda^{n-i} \mathbf{x}[i] \mathbf{x}[i]^T) \quad (3.69)$$

$$\mathbf{p}[n] = \sum_{i=0}^n (\lambda^{n-i} d[i] \mathbf{x}[i]^T) \quad (3.70)$$

Optimalni vektor uteži dobimo z upoštevanjem (3.67) in (3.67) v enačbi (3.66):

$$\mathbf{w}_{opt}[n] = \mathbf{R}[n]^{-1} \mathbf{p}[n] \quad (3.71)$$

Tudi trenutne vrednosti  $\mathbf{R}[n]$  in  $\mathbf{p}[n]$  lahko računamo rekurzivno, kar zelo zmanjša kompleksnost računanja:

$$\mathbf{R}[n] = \lambda \mathbf{R}[n-1] + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}[n]^T \quad (3.72)$$

$$\mathbf{p}[n] = \lambda \mathbf{p}[n-1] + d[n] \mathbf{x}[n]^T \quad (3.73)$$

### 3.4.2 Rekurzivno računanje uteži

Direktno računanje uteži po enačbi (3.71) zahteva red  $O(N^3)$  množenj, zato uporabimo rekurzivni postopek računanja.

Algoritem za inverzno računanje avtokorelacijske matrike uporablja teorem o inverziji matrik, ki ga le kratko povzamemo: Matriko  $\mathbf{A}$  izrazimo s tremi matrikami  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \quad (3.74)$$

Kvadratni matriki  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  imata red  $N \times N$  in sta pozitivno definitni. Matrika  $\mathbf{C}$  je reda  $N \times M$ , matrika  $\mathbf{D}$  pa je reda  $M \times M$ . Inverzno matriko poiščemo po obrazcu:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \quad (3.75)$$

Če primerjamo enačbo za rekurzivno računanje avtokorelacijske matrike (3.72) z zapisom (3.71), lahko preberemo vrednosti matrik:

$$\mathbf{A}_{N \times N} = \mathbf{R}[n] \quad (3.76)$$

$$\mathbf{B}_{N \times N} = \lambda \mathbf{R}[n-1] \quad (3.77)$$

$$\mathbf{C}_{N \times 1} = \mathbf{x}[n] \quad (3.78)$$

$$\mathbf{D}_{1 \times 1} = 1 \quad (3.79)$$

Zadnje upoštevamo v formuli za računanje inverzne matrike (3.75):

$$\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda} \left( \mathbf{R}^{-1}[n-1] - \frac{\mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n]} \right) \quad (3.80)$$

Poseben pomen v enačbi (3.80) ima člen, ki ga imenujemo vektor ojačenj  $\mathbf{k}[n]$ :

$$\mathbf{k}[n] = \frac{1}{\lambda + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n]} \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{x}[n] \quad (3.81)$$

Vektor ojačenj  $\mathbf{k}[n]$  je preslikava (rotacija) vektorja vhodnega signala:

$$\mathbf{k}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{x}[n] \quad (3.82)$$

Optimalno utež lahko sedaj izrazimo v skladu z enačbo (3.71), če upoštevamo rekurzivni enačbi (3.73) in (3.80):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[n] &= \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{p}[n] \\ &= \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{k}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{p}[n-1] + \mathbf{R}^{-1}[n] \mathbf{x}[n] d[n] \end{aligned} \quad (3.83)$$

V prvem in drugem členu v zgornji enačbi upoštevamo:

$$\mathbf{w}[n-1] = \mathbf{R}^{-1}[n-1] \mathbf{p}[n-1],$$

v zadnjem členu pa upoštevamo tudi izraz (3.82):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[n] &= \mathbf{w}[n-1] - \mathbf{k}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n] d[n] \\ &= \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n] (d[n] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{w}[n-1]) \\ &= \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n] \epsilon[n] \end{aligned} \quad (3.84)$$

Enačba (3.84) skupaj z enačbami (3.80) in (3.81) določa RLS algoritem za korekturo vektorja uteži. Algoritem ponovno opišemo v zaporednih korakih:

1.  $n = 0$  , postavimo začetno vrednost uteži in začetni približek inverzne avtokorelacijske matrike

$$\mathbf{R}^{-1}[0] = \frac{1}{\sigma} I$$

$$\mathbf{w}[0] = 0$$

$$n = 1$$

2. izračunamo pomožni vektor  $\mathbf{a}[n]$  in vektor ojačenj  $\mathbf{k}[n]$ :

$$\mathbf{a}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n-1]\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{k}[n] = \frac{1}{\lambda + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{a}[n]}\mathbf{a}[n]$$

3. novo vrednost inverzne avtokorelacijske matrike računamo rekurzivno:

$$\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda} \left( \mathbf{R}^{-1}[n-1] - \mathbf{k}[n]\mathbf{a}^T[n] \right)$$

4. signal napake računamo na osnovi pretekle vrednosti uteži:

$$\epsilon[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n-1]\mathbf{x}[n]$$

5. in popravimo vrednost vektorja uteži :

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n]\epsilon[n]$$

6.  $n \leftarrow n + 1$  , postopek nadaljujemo pod točko 2.

Pomožni vektor  $\mathbf{a}[n]$  uvedemo samo zaradi zmanjšanja kompleksnosti računanja izrazov v vsaki iteraciji.

Računsko kompleksnost algoritmov merimo s številom množenj. Za en popravek uteži RLS adaptivnega sito dolžine  $N$  potrebujemo velikostni red  $O(N^2)$  množenj. Obstajajo tudi računsko bolj učinkoviti algoritmi. Računsko kompleksnost RLS algoritma lahko zmanjšamo, če upoštevamo posebne lastnosti avtokorelacijske matrike  $\mathbf{R}$ . Primer računsko učinkovitega algoritma je hitri Kalmanov algoritem (Fast Kalman). Število množenj narašča linearno z dolžino adaptivnega sita:  $O(N)$ .

### 3.5 Primerjava algoritmov

Primerjajmo enačbe za popravljenje vektorja uteži za prej obravnavane algoritme. Enačbo za popravljanje vektorja uteži lahko zapišemo v enotni obliki:

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n]\epsilon[n]$$

Kot smo spoznali v prejšnem razdelku je pri RLS algoritmu korak adaptacije v splošnem različen za različne uteži, odvisno od rotacije vektorja vhodnega signala (3.82):

$$\mathbf{k}_{RLS}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{x}[n]$$

Pri LMS algoritmu (3.57) je smer vektorja ojačenj enaka smeri signalnega vektorja:

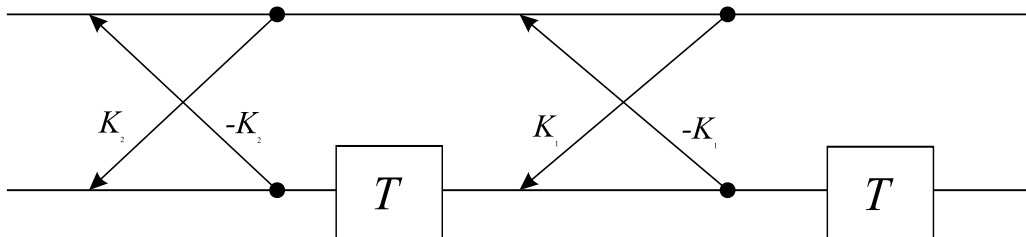
$$\mathbf{k}_{LMS}[n] = 2\mu\mathbf{x}[n]$$

Enoten korak adaptacije za vse uteži ima tudi normalizirani LMS algoritem (3.62):

$$\mathbf{k}_{nLMS}[n] = \frac{1}{\alpha + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]}\mathbf{x}[n]$$

### 3.6 Druge strukture adaptivnega sita

Poleg transversalnega sita se lahko v adaptivnih sistemih uporabi tudi druge strukture sit s končnim odzivom (FIR). Najbolj primerna za adaptivne sisteme je tako imenovana lestvična (lattice) struktura, ki je prikazana na sliki 3.12. Ta ima pred



Slika 3.12 – Lestvična struktura FIR sita (sl3-11)

transverzalnim sitom predvsem to prednost, da je mogoče srednjo kvadratično vrednost napake minimizirati neodvisno za vsako stopnjo posebej in tudi za vsako stopnjo posebej določiti velikost adaptacijskega faktorja  $\mu$ . Lestvična struktura se uporablja

predvsem pri predikciji govornega signala, ker uteži v tej strukturi neposredno odražajo fizikalne lastnosti govornega trakta.

Namesto sita s končnim odzivom (FIR) se lahko uporabi tudi sita z neskončnim odzivom (IIR). Prednost sit z neskončnim odzivom je predvsem v tem, da se lahko določenemu frekvenčnemu poteku približajo z manj koeficienti (utežmi) kot bi jih potrebovali pri situ s končnim odzivom in je lahko zato adaptacija hitrejša. Sita z neskončnim odzivom pa imajo glede uporabe v adaptivnih sistemih predvsem dve slabi lastnosti:

1. Srednja kvadratična vrednost napake ni več kvadratična funkcija uteži in ima lahko v splošnem več lokalnih minimumov, zato enostavni gradientni postopki adaptacije za IIR sita ne zadoščajo.
2. IIR sita lahko postanejo pri določeni nastavitvi koeficientov nestabilna, med tem ko FIR sita sama po sebi zagotavljajo stabilnost.

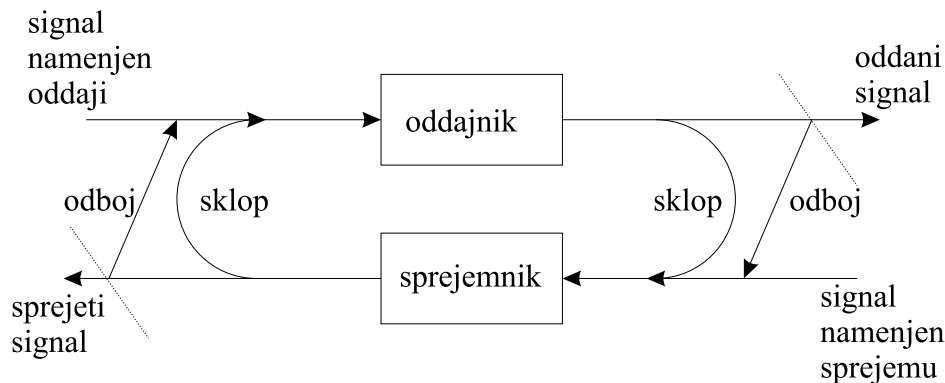
Poleg postopkov, ki so osnovani na merjenju gradienta kriterijske funkcije obstajajo tudi drugi postopki, od katerih omenimo predvsem postopek z iskanjem v naključni smeri, ki daje podobne rezultate kot postopek spusta po največji strmini in postopek genetskega iskanja, ki je uporaben predvsem, kadar ima kriterijska funkcija lokalne minimume v katere bi se ujeli gradientni postopki in postopki iskanja v naključni smeri.

## 4 Primeri uporabe adaptivne obdelave signalov v telekomunikacijah

Uporaba adaptivna obdelave signalov se je razmaknila predvsem v regulacijski tehniki in telekomunikacijah. Najpomembnejša področja uporabe adaptivne obdelave signalov v telekomunikacijah smo našli že v uvodnem poglavju, v tem poglavju pa bomo za boljšo ilustracijo malo natančneje proučili le dve od njih, to je izločanje odmeva in izravnava karakteristike kanala oziroma izločanje intersimbolne interference.

### 4.1 Adaptivno izločanje odmeva

O odmevu govorimo, kadar signal lokalnega oddajnika na nek način pronica do sprejemnika in moti sprejem in/ali sprejeti signal pronica do lokalnega oddajnika in moti oddajo. Odmev lahko nastane kot posledica odbojev signala ali pa kot posledica neželenih električnih oziroma akustičnih sklopov. Različne možnosti so prikazane na sliki 4.1.



Slika 4.1 – Različne poti odbitega signala (sl4-1)

Motnje, ki jih povzroča odmev, so lahko različne narave, v odvisnosti od vrste

---

odmeva in od sistema v katerem nastopa. Naštejmo le nekaj najbolj značilnih učinkov:

- Pri telefonski zvezi lahko pride do odmeva zaradi odboja pri prehodu iz štirižične na dvožično povezavo ali pa nastane odmev kot posledica akustičnega sklopa med slušalko in mikrofonom na nasprotni strani. Ker je ta sklop običajno šibak je tudi odmev mnogo šibkejši od oddanega signala in ne moti pogovora pri lokalni telefonski zvezi. Pri medcelinskih klicih, predvsem kadar je zveza vzpostavljena preko satelita, pa so zakasnitve na prenosni poti zaradi velike razdalje občutne in je odmev zakasnen tudi do pol sekunde. Slišimo ga kot odmev lastnega glasu v slušalki, kar je lahko zelo moteče.

Do velikih zakasnitev odmeva prihaja tudi pri tako imenovani internet telefoniji, kjer je zveza vzpostavljena preko paketnega podatkovnega omrežja Internet, ki ni bilo načrtovano za sproten prenos govornega signala, temveč za prenos podatkov, kjer zakasnitve niso kritične.

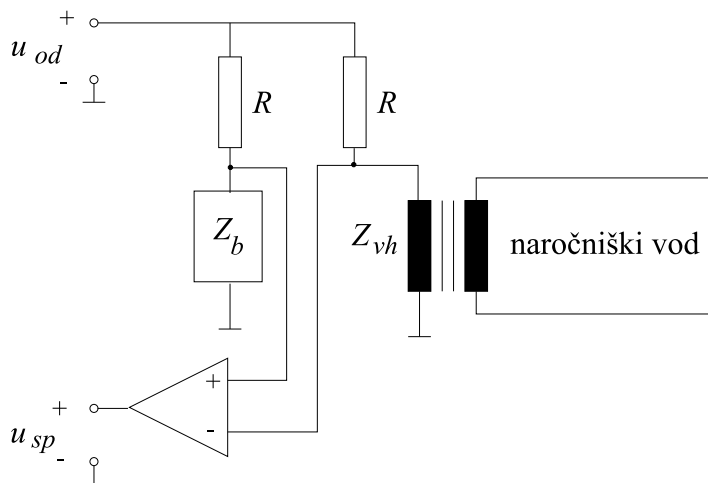
- Akustični sklop je lahko zelo močan pri uporabi telefona brez slušalke, kjer poslušamo akustični signal preko zvočnika in mora biti zato ojačen. Do močnega sklopa pride predvsem zaradi odbojev akustičnega signala v prostoru in kadar mikrofona in zvočnika nista dovolj usmerjena. Če je akustičen sklop močan na obeh straneh zveze, dobimo zaprto zanko in lahko pride do oscilacij, ki jih slišimo kot značilen pisk mikrofonijske. Pri pogovorih na dolge razdalje pa lahko slišimo večkratni odmev svojega glasu.
- Pri digitalnem prenosu je moteč tudi odmev z majhno zakasnitvijo, ki nastane kot posledica odbojev na nehomogenostih naročniškega voda. Odbitega signala tu ne slišimo neposredno, vendar pa ta moti pravi prejem signala z nasprotni strani in lahko onemogoča prenos.

V nadaljevanju bomo malo natančneje obdelali različne možnosti izločanja odmeva pri dvosmernem digitalnem prenosu.

#### 4.1.1 Izločanje odboja pri dvosmernem dvožičnem digitalnem prenosu

V digitalnem telefonskem omrežju z integriranimi storitvami (ISDN - Integrated Services Digital Network) poteka prenos digitalno do končnega naročnika. Govorni signal se zato prenaša digitalno, kodiran s 64 kbit/s. V ISDN omrežju je končnemu uporabniku na voljo osnovni dostop, ki omogoča hkraten dvosmeren prenos dveh govornih signalov 64 kbit/s in enega podatkovnega signala 16 kbit/s (2 B kanala in 1 D kanal). Skupna prenosna hitrost, ki je na voljo uporabniku je tako 144 kbit/s. Temu je dodanih še dodatnih 16 kbit/s, ki so potrebni za sinhronizacijo in niso na voljo uporabniku. Skupna prenosna hitrost je tako 160 kbit/s. Pri tem je zahtevana velika zanesljivost prenosa s pogostostjo napake manjšo od  $10^{-7}$ .

Uporabnik priključen na lokalno centralo dvožično, preko obstoječega naročniškega omrežja. Ker poteka prenos hkrati v obe strani, je potrebno ločiti smeri prenosa. Pri analognem prenosu govornega signala je za ločitev smeri prenosa skrbelo balančno vezje. Načelna vezava balančnega vezja je prikazana na sliki 4.2. Kadar je balančna impedanca



Slika 4.2 – Ločitev smeri prenosa z balančnim vezjem (sl4-2)

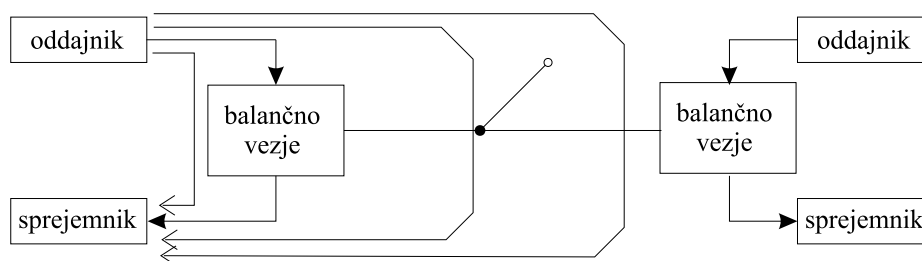
$Z_b$  enaka vhodni impedanci naročniškega voda  $Z_{vh}$  je mostična vezava uravnotežena in oddajni signal  $u_{od}$  ne moti sprejetega signala  $u_{sp}$ .

Pri prenosu govornega signala v frekvenčnem območju 300 do 3400 Hz ločitev smeri z balančnim vezjem zadošča, ker je po eni strani mogoče v tem frekvenčnem območju



dokaj dobro uravnotežiti balančno vezje, po drugi strani pa nas ne moti, če del oddanega signala iz mikrofona uhaja nazaj v slušalko, temveč je to celo zaželjeno.

Pri digitalnem prenosu 160 kbit/s potrebujemo za prenos bistveno širši prenosni pas. Pri teh frekvencah lahko pričakujemo, da bo signal z nasprotne strani oslabljen tudi do 40 db, z dobro uglasitvijo balančnega vezja pa je mogoče doseči največ 10 db slabljenja signala, ki uhaja iz oddajnika neposredno v sprejemnik na isti strani. Poleg tega, da signal uhaja neposredno preko balančnega vezja (bližnji odboj), se lahko odbija tudi na nezveznostih na naročniškem vodu in od neprilagojenega sprejemnika na nasprotni strani (daljni odboj). Razmere so prikazane na sliki 4.3.



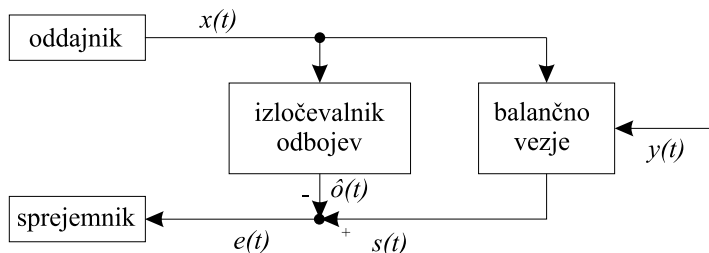
Slika 4.3 – Odboji na naročniškem vodu (sl4-3)

Bližnji odboj ima majhno zakasnitev in majhno slabljenje, medtem ko ima daljnji odboj večjo zakasnitev in tudi večje slabljenje. V najslabšem primeru je lahko nivo odbitega signala tudi do 30 dB višji od nivoja koristnega signala z nasprotne strani, za zanesljiv prenos pa bi potrebovali razmerje med signalom in šumom najmanj 20 dB, kar pomeni, da je potrebno to razmerje popraviti za 50 dB. Da bi lahko to dosegli, moramo med oddajnik in sprejemnik vključiti izločevalnik odboja, ki iz sprejetega signala izloči odbiti signal, kot je to prikazano na sliki 4.4

Signal  $s(t)$  je vsota koristnega signala z nasprotne strani  $y(t)$ , in odbitega signala  $o(t)$ , to je signala  $x(t)$ , ki je oslabljen in popačen na prenosni poti odboja. Prevaljalna funkcija poti odboja je enaka:

$$H_{odb}(\omega) = \frac{O(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.1)$$

kjer sta z  $O(\omega)$  in  $X(\omega)$  označena Fourierova transformata signalov  $o(t)$  in  $x(t)$ . Če bi bila prevajalna funkcija izločevalnika  $\hat{H}_{odb}(\omega)$  enaka prevajalni funkciji poti odboja  $H_{odb}(\omega)$ ,

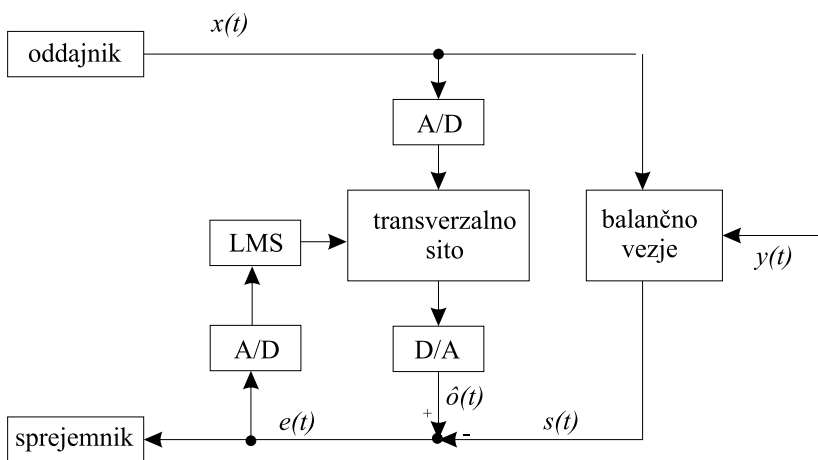


Slika 4.4 – Izločevalnik odboja (sl4-4)

bi bil tudi približek odboja  $\hat{o}(t)$  enak odbitemu signalu  $o(t)$ . Signal  $e(t)$ :

$$e(t) = s(t) - \hat{o}(t) = y(t) + o(t) - \hat{o}(t) \quad (4.2)$$

pa bi bil enak signalu z nasprotne strani  $y(t)$ . Ker prevajalne funkcije poti odboja ne poznamo vnaprej, saj je pri vsakem naročniku drugačna, poleg tega pa se v odvisnosti od temperature tudi počasi spreminja, mora biti izločevalnik odbojev adaptiven. Izvedemo ga lahko z adaptivnim transverzalnim sitom in uporabo LMS ali podobnega algoritma. Ker je transverzalnno sito digitalno, moramo vključiti tudi digitalno analogni in analogno digitalni pretvornik, kot je to prikazano na sliki 4.5.



Slika 4.5 – Adaptivni izločevalnik odbojev (sl4-5)

Ker želimo, da bi bil signal na izhodu izločevalnika enak odbitemu signalu, predstavlja njuna razlika signal napake  $\eta(t)$ , ki je potreben za adaptacijo:

$$\eta(t) = o(t) - \hat{o}(t) \quad (4.3)$$

Ker tega signala nimamo na razpolago, uporabimo pri adaptaciji kar signal  $e(t)$ , ki je v skladu z (4.2) in (4.3) enak:

$$e(t) = \eta(t) + y(t) \quad (4.4)$$

Vidimo, da bo koristni signal  $y(t)$  z nasprotne strani motil adaptacijski proces in se bo, ker običajno ni koreliran s signalom  $x(t)$ , obnašal kot šum v referenčnem signalu adaptacijskega procesa.

Če predpostavimo, da je uporabljena za prenos štirinivojska koda 2B1Q, ki se običajno uporablja za bazni ISDN dostop, je v skladu s 1. Nyquistovim kriterijem potrebna za prenos 160 kbit/s pasovna širina 40 kHz. V skladu s teoremom o vzorčenju moramo signal pri A/D pretvorbi vzorčiti vsaj z dvakratno mejno frekvenco, da bi lahko signal verno rekonstruirali pri D/A pretvorbi, kar pomeni, da bi morala biti hitrost vzorčenja najmanj 80 kHz, praktično pa okrog 200 kHz, da rekonstrukcijsko sito in sito proti prekrivanju nista preveč zahtevni. Čas med posameznimi vzorci je potem enak:

$$T_{vz} = \frac{1}{f_{vz}} = 5\mu s \quad (4.5)$$

Za izločevalnik odbojev smo uporabili adaptivno transversalno sito, ki ima končno dolg odziv. Dolžina odziva je odvisna od reda filtra  $N$  in je enaka:

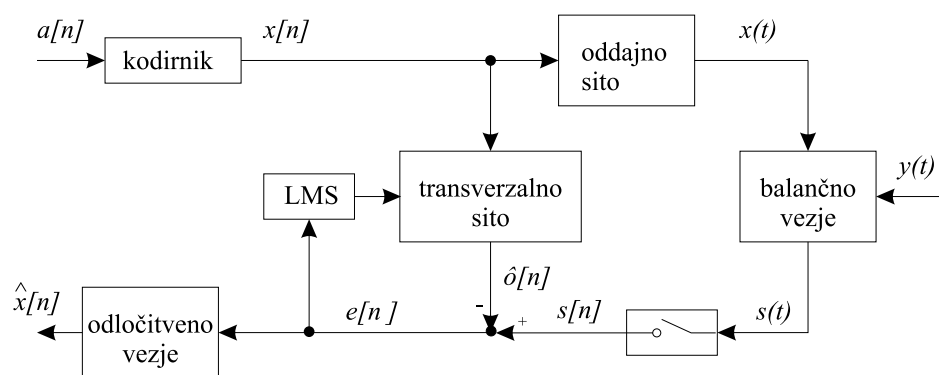
$$T_{odz} = NT_{vz} \quad (4.6)$$

Če želimo, da bo lahko izločevalnik izločil vse odboje, mora biti dolžina njegovega odziva vsaj tolikšna, kot je zakasnitev odbitega signala z največjo zakasnitvijo, to je signala, ki se odbije z nasprotne strani najdaljšega naročniškega voda. Najdaljši naročniški vod v ISDN omrežju naj ne bi presegal 8 km, kar pomeni, da je pot odboja največ 16 km. Ker potrebuje valovanje  $5 \mu s$  na kilometer, je zakasnitev odboja največ  $80 \mu s$ . Potrebna dolžina transversalnega sita je potem enaka:

$$N = \frac{T_{odb}}{T_{vz}} = \frac{80\mu s}{5\mu s} = 16 \quad (4.7)$$

Odvečnim A/D in D/A pretvorbam se lahko izognemo, če upoštevamo digitalno naravo signala, ki ga prenašamo, kot je to prikazano na sliki 4.6

## 4.2 Adaptivna izravnava prevajalne karakteristike kanala



Slika 4.6 – Izločevalnik odbojev, ki deluje neposredno z digitalnim signalom (sl4-6)