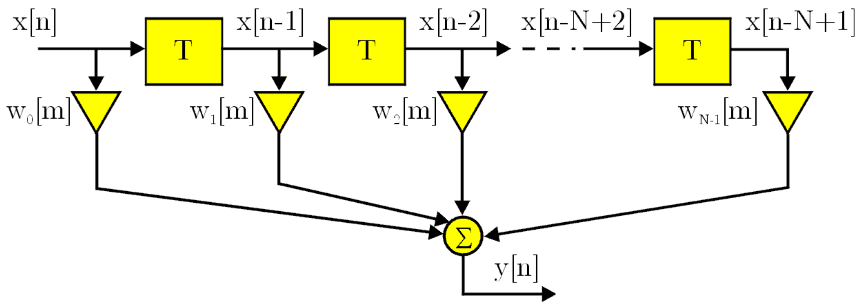
Adaptivna obdelava signalov v telekomunikacijah

6. del

Pregled tem:

- Adaptivno transverzalno sito
- Transverzalno sito
  - odziv transverzalnega sita
  - prevajalna funkcija transverzalnega sita
  - vektorski zapis signalov
- Optimalno sito
  - kriterijska funkcija
  - optimalni vektor uteži

Adaptivno transverzalno sito

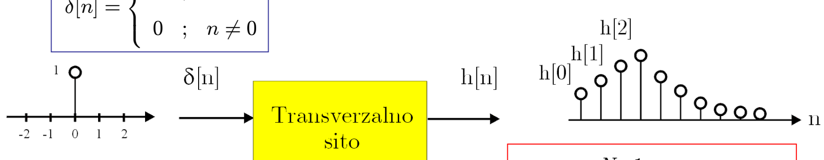


$$y[n] = w_0 x[n] + w_1 x[n-1] + w_2 x[n-2] + \ldots + w_{N-1} x[n-N+1]$$

Odziv transverzalnega sita

- signal na vhodu je enotin impulz:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$



- signal na izhodu imenujemo impulzni odziv:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} w_m \delta[n-m]$$

- impulzni odziv je enak utežem transverzalnega sita:

$$h[n] = w_n$$

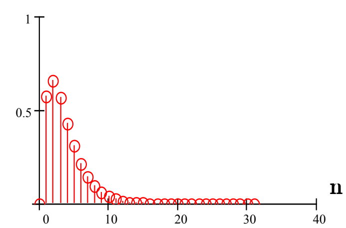
- signal na izhodu je konvolucija signala na vhodu in odziva na enotin impulz:

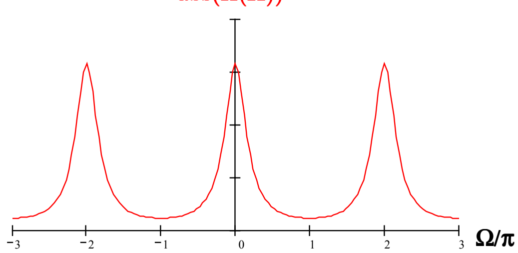
$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] x[n-m]$$

Prevajalna funkcija transverzalnega sita

- Prevajalna funkcija $H(\Omega)$ je časovno diskretni Fourierov transform impulznega odziva $h[n]$: $H(\Omega) = \boldsymbol{TDFT}(h[n])$

$$\boxed{H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\Omega n}} \qquad \boxed{\Omega = T\omega}$$

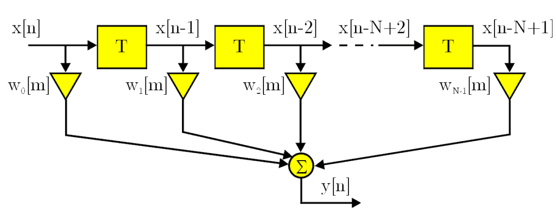




Vektorski zapis signalov

- N uteži transverzalnega sita w_0, w_1 .. w_{N-1} zapišemo s stolpičnim vektorjem:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{N-1} \end{bmatrix}$$

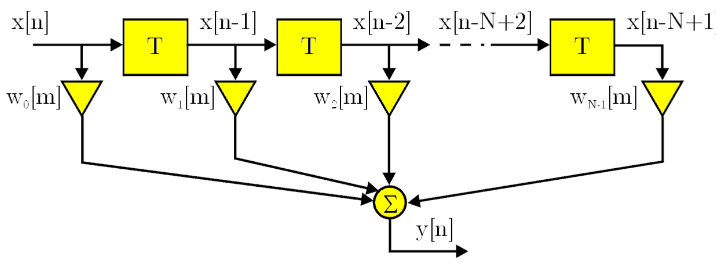


- Signal $x[n]$ je v transverzalnem situ prisoten z N različno zakasnjenimi komponentami, ki jih zapišemo s stolpičnim vektorjem:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \\ . \\ . \\ . \\ x[n-N+1] \end{bmatrix}$$

Vektorski zapis signalov

- Izhodni signal $y[n]$ je konvolucija vhodnega signala $x[n]$ in uteži w_0, w_1 .. w_{N-1} :

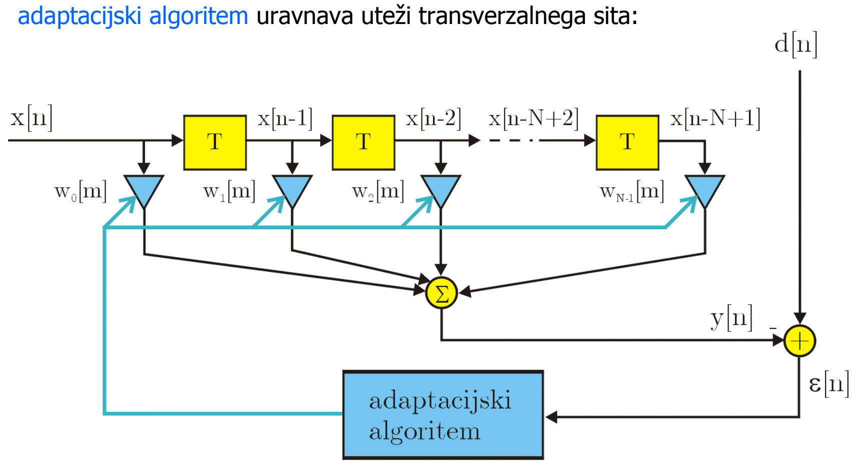


- Izhodni signal $y[n]$ je skalarni produkt vektorja vhodnega signala in vektorja uteži :

$$\boxed{y[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\mathbf{x}[n]}$$

Adaptivno sito

adaptacijski algoritem uravnava uteži transverzalnega sita:



Kriterijska funkcija

- Za kriterijsko funkcijo izberemo povprečno vrednost kvadrata signala napake:

$$\varepsilon[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \mathbf{w}^T\mathbf{x}[n] = d[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}$$

$$\xi = \overline{\varepsilon^2[n]} = \mathbf{w}^T\underbrace{\overline{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}}_{\text{avtokorelacijska matrika vhodnega signala } x}\mathbf{w} - 2\underbrace{\overline{d[n]\mathbf{x}^T[n]}}_{\text{vektor križnih korelacij med vhodnim signalom } x \text{ in želenim signalom } d}\mathbf{w} + \overline{d^2[n]}$$

$$\xi = \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}^T\mathbf{w} + \overline{d^2[n]}$$

Avtokorelacijska matrika **R**

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}$$

- elementi matrike so vrednosti avtokorelacijske funkcije vhodnega signala:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & . & . & . & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & . & . & . & r_{N-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & . & . & . & r_{N-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ r_{N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & . & . & . & r_0 \end{bmatrix}$$

Vektor križnih korelacij **P**

$$\boxed{\mathbf{p} = \overline{d[n]\mathbf{x}^T[n]}}$$

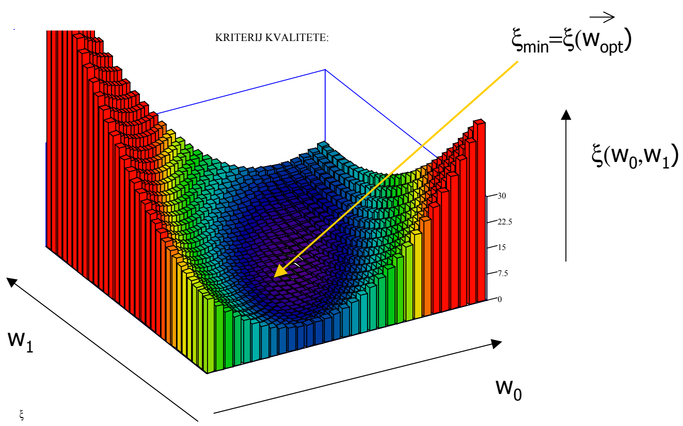
- elementi stolpičnega vektorja P so vrednosti funkcije križne korelacije med želenim signalom d in vhodnim signalom x:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_{N-1} \end{bmatrix}$$

Minimum kriterijske funkcije

- Kriterijska funkcija je kvadratična funkcija vektorja uteži. Vzemimo primer kriterijske funkcije za sito z dvemi utežmi:

$$\xi = [w_0 \ w_1] \begin{bmatrix} r_0 & r_1 \\ r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - 2\,[p_0 \ \ p_1] \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} + \overline{d^2[n]}$$



Gradient kriterijske funkcije

- Minimum kriterijske funkcije je samo eden. V minimumu je gradient kriterijske funkcije enak 0.

- Gradient kriterijske funkcije:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} = 2(\mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p})$$

Optimalna nastavitev uteži

- Iščemo vektor uteži, pri katerem je gradient kriterijske funkcije enak 0:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} = 2(\mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p})$$

- Optimalni vektor uteži:

$$\boxed{\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}}$$