Adaptivna obdelava signalov v telekomunikacijah

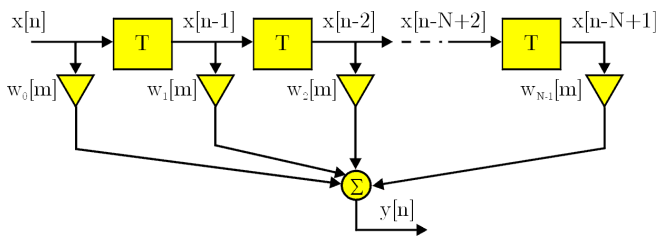
7. del

Pregled tem:

- Adaptivno transverzalno sito
  - graf kriterijske funkcije
  - gradient kriterijske funkcije in optimalni vektor uteži
- Gradientni postopki
  - spust po največji strmini
  - Newtonov postopek
  - primerjava obeh postopkov
- LMS algoritem
  - posplošitev enodimenzionalnega postopka
  - LMS adaptivno sito

Adaptivno transverzalno sito

- Izhodni signal y[n] je konvolucija vhodnega signala x[n] in uteži w_0, w_1 .. w_{N-1} :



- Izhodni signal y[n] je skalarni produkt vektorja vhodnega signala in vektorja uteži :

$$\boxed{y[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\mathbf{x}[n]}$$

Zapis kriterijske funkcije

$$\boxed{\xi = \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}^T\mathbf{w} + \overline{d^2[n]}}$$

avtokorelacijska matrika vhodnega signala x

vektor križnih korelacij med vhodnim signalom x in želenim signalom d

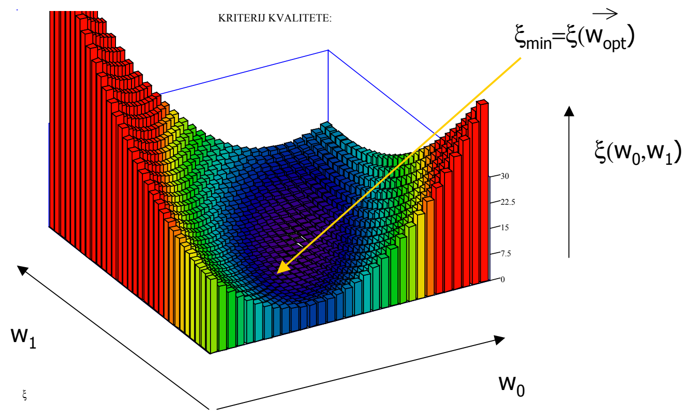
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & . & . & . & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & . & . & . & r_{N-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & . & . & . & r_{N-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ r_{N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & . & . & . & r_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$r_m = \overline{x[n]x[n-m]} \qquad p_m = \overline{d[n]x[n-m]}$$

Graf kriterijske funkcije (1)

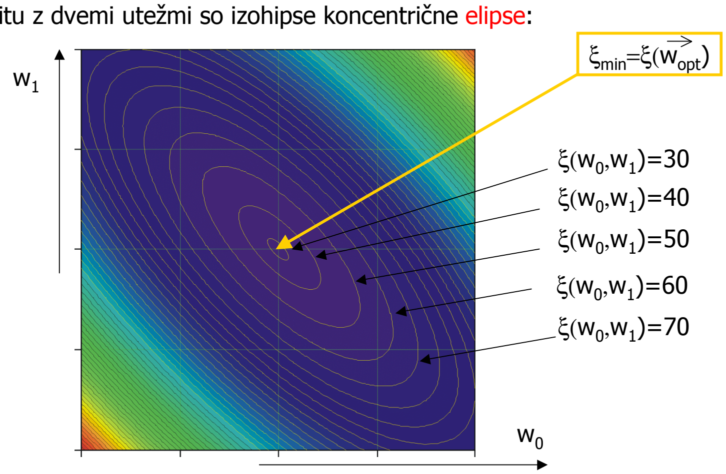
- Kriterijska funkcija je kvadratična funkcija vektorja uteži. Za primer sita z dvemi utežmi je ξ(w0,w1) dvodimenzionalni paraboloid:

$$\xi = [w_0\ w_1]\begin{bmatrix} r_0 & r_1 \\ r_1 & r_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - 2\,[p_0\ \ p_1]\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} + \overline{d^2[n]}$$



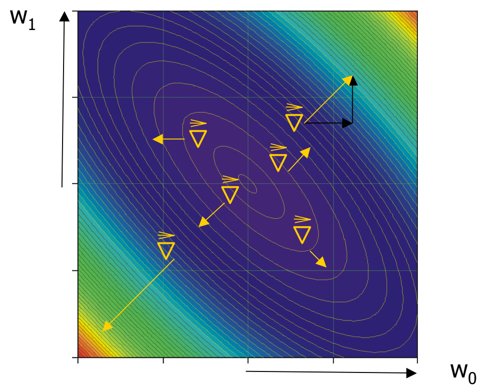
Graf kriterijske funkcije (2)

- Kriterijsko funkcijo lahko ponazorimo s plastnicami v ravnini (w0,w1)
- Plastnice (izohipse) združujejo točke z enako vrednostjo kriterijske funkcije: $\xi(w_0,w_1)$=konst
- Pri situ z dvemi utežmi so izohipse koncentrične elipse:



Gradient kriterijske funkcije

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial \xi}{\partial w_{N-1}} \end{bmatrix} = 2(\mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p})$$



- Smer gradienta je pravokotna na izohipse.
- Velikost gradienta je obratnosorazmerna razdalji med izohipsami.
- Pri optimalnem vektorju uteži je gradient enak 0: $\boxed{\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}}$

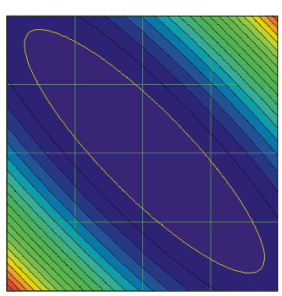
Lastnosti vhodnega signala in oblika izohips

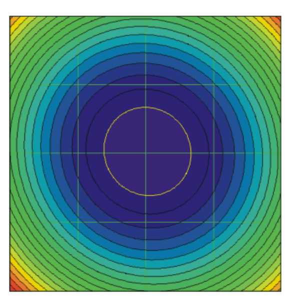
- Oblika izohips je odvisna samo od lastnosti vhodnega signala:

$$\boxed{\xi(\mathbf{v}) = \xi_{min} + \mathbf{v}^T\mathbf{R}\mathbf{v}}$$

- Lastne vrednosti λ in lastni vektorji Q matrike R: **R Q=λ Q**
- Lastni vektorji kažejo v smeri polosi elips, sploščenost elips pa je odvisna od razmerje lastnih vrednosti matrike R:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1.75 \\ 1.75 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 3.75 \end{bmatrix}$$





$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

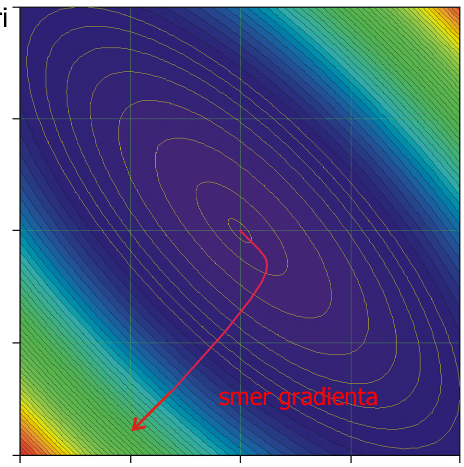
Gradientni postopek iskanja optimalne uteži - 1

Spust po največji strmini :

- utež spreminjamo v nasprotni smeri gradienta, kar ustreza spustu po največji strmini (steepest descent):

$$\boxed{\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - \mu\nabla[m]}$$

- spust po največji strmini ni najkrajša pot do optimalne točke !



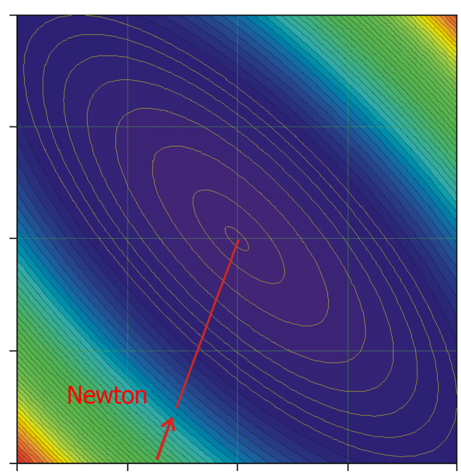
Gradientni postopek iskanja optimalne uteži - 2

Newtonov postopek :

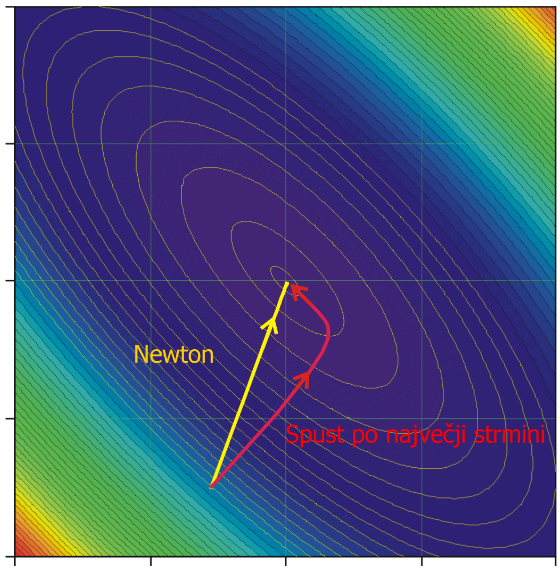
- utež spreminjamo direktno v smeri optimalne vrednosti:

$$\boxed{\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - \mu\mathbf{R}^{-1}\nabla[m]}$$

- rešitev v enem koraku za primer μ=0.5
- računamo inverzno matriko !



Primerjava gradientnih postopkov



Večdimenzionalni LMS algoritem

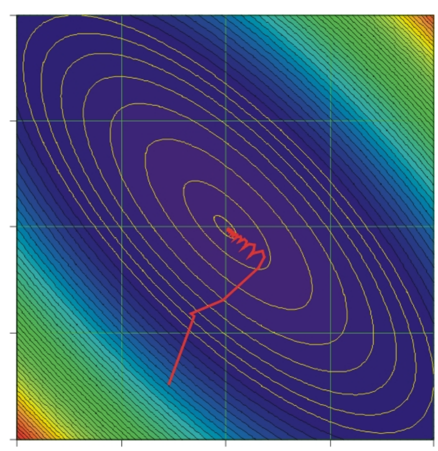
- uteži spreminjamo v nasprotni smeri približka gradienta:

$$\boxed{\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + 2\mu\varepsilon[n]\mathbf{x}[n]}$$

- izbira konstante μ:

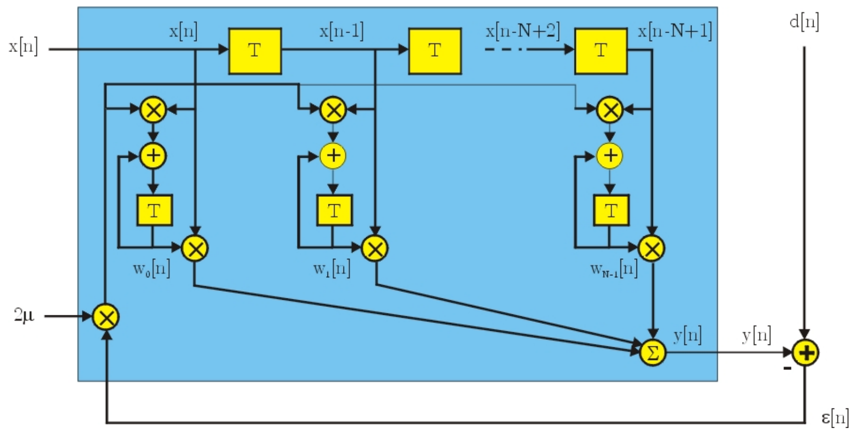
$$\boxed{0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{maks}} < \frac{1}{Nr_0}}$$

- Pot popravljanja uteži je podobna kot pri spustu po največji strmini. Odstopanja so posledica napačne ocene gradienta.



Adaptivno LMS sito

- glavna prednost LMS algoritma je preprostost, ki omogoča ceneno izvedbo adaptivnega transverzalnega LMS sita:



Posplošitve na več dimenzij N>1

$y[n] = w\,x[n]$	$y[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\mathbf{x}[n]$
$\xi = Rw^2 - 2Pw + \overline{d^2[n]}$	$\xi = \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}^T\mathbf{w} + \overline{d^2[n]}$
$\frac{d\xi}{dw} = 2(Rw - P)$	$\nabla = 2(\mathbf{RW} - \mathbf{P})$
$w_{opt} = \frac{P}{R}$	$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$
$w[m+1] = w[m] - \mu\nabla[m]$	$\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - \mu\nabla[m]$
	$\mathbf{w}[m+1] = \mathbf{w}[m] - \mu\mathbf{R}^{-1}\nabla[m]$
$w[n+1] = w[n] + 2\,\mu\,\varepsilon[n]x[n]$	$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + 2\mu\varepsilon[n]\mathbf{x}[n]$