Adaptivna obdelava signalov v telekomunikacijah

8. del

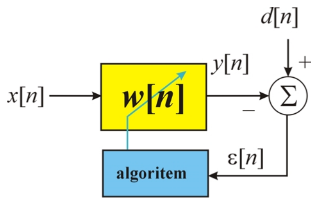
Pregled tem:

- LS kriterijska funkcija
  - faktor pozabljanja λ , efektivna dolžina okna
  - minimizacija kriterijske funkcije, optimalna utež **w**
  - približek **R** in **P**
- Rekurzivni postopki računanja:
  - rekurzivno računanje približka avtokorelacijske matrike **R**
  - rekurzivno računanje približka vektorja **P**
  - rekurzivno računanje inverzne matrike $\mathbf{R}^{-1}$
- RLS algoritem :
  - rekurzivni postopek računanja vektorja uteži **w**
  - primerjava z LMS algoritmom

LS kriterijska funkcija

- Za kriterijsko funkcijo uporabimo eksponentno uteženo vsoto kvadratov napak:

$$\boxed{C[n] = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} (d[i] - \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[i])^2}$$

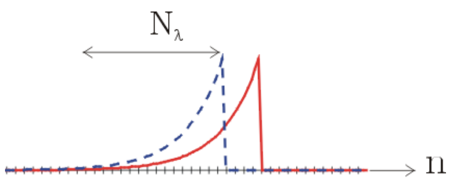


- Minimizacija kriterijske funkcije LS pomeni minimizacijo utežene vsote kvadratov napak (Least Squares)

Eksponentno okno

- utež λ imenujemo konstanta pozabljanja

$$0 < \lambda < 1$$



- eksponentno okno ima efektivno dolžino N_λ:

$$\boxed{N_\lambda = \frac{1}{1-\lambda}}$$

Minimizacija kriterijske funkcije

$$C[n] = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} (d[i] - \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}[i])^2$$

- iščemo utež **w**[n], pri kateri je C[n] najmanjša: $$\frac{dC[n]}{dw[n]} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-1} \mathbf{x}[i]\mathbf{x}^T[i] \, \mathbf{w}_{opt} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-1} \mathbf{d}[i]\mathbf{x}[i]$$

približek avtokorelacijske matrike **R** približek vektorja **P**

- optimalni vektor uteži:

$$\mathbf{w}_{opt}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{P}[n]$$

Rekurzivno računanje R in P

- Nove vrednosti avtokorelacijske matrike in vektorja uteži računamo na osnovi preteklih vrednosti:

$$\mathbf{R}[n] = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-1} \mathbf{x}[i]\mathbf{x}^T[i]$$

$$\mathbf{R}[n] = \mathbf{R}[n-1]\,\lambda + \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]$$

$$\mathbf{P}[n] = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-1} d[i]\mathbf{x}[i]$$

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{P}[n-1]\,\lambda + d[n]\mathbf{x}[n]$$

Rekurzivno računanje inverzne matrike R^{-1}

- nove vrednosti inverzne avtokorelacijske matrike računamo na osnovi preteklih vrednosti:

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{R}^{-1}[n-1] - \frac{\mathbf{R}^{-1}[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{R}^{-1}[n-1]\mathbf{x}[n]}\right)}$$

- pomožni vektor : $\boxed{\mathbf{v}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n-1]\mathbf{x}[n]}$

- vektor ojačenj **k**[n]: $\boxed{\mathbf{k}[n] = \dfrac{\mathbf{v}[n]}{\lambda + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n]}}$

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{R}^{-1}[n-1] - \mathbf{k}[n]\mathbf{v}^T[n])}$$

RLS algoritem

- inicializacija inverzne avtokorelacijske matrike in vektorja uteži:

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1}[0] = \frac{1}{\sigma}\mathbf{I}} \quad \boxed{\mathbf{w}[0] = \mathbf{0}}$$

- rekurzivno računanje vektorja uteži:

$$\boxed{\epsilon[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n-1]\mathbf{x}[n]}$$

$$\boxed{\mathbf{v}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n-1]\mathbf{x}[n]}$$

$$\boxed{\mathbf{k}[n] = \frac{\mathbf{v}[n]}{\lambda + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n]}}$$

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1}[n] = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{R}^{-1}[n-1] - \mathbf{k}[n]\mathbf{v}^T[n])}$$

$$\boxed{\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \mathbf{k}[n]\epsilon[n]}$$

$$\boxed{n \leftarrow n+1}$$

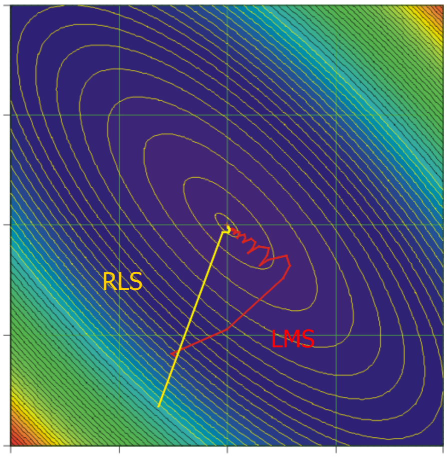
RLS algoritem

- uteži spreminjamo približno v smeri najkrajše poti:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mathbf{k}[n]\epsilon[n]$$

- **k**[n] je vektor ojačenj, ki ga dobimo z rotacijo vektorja vhodnega signala:

$$\mathbf{k}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{x}[n]$$



Primerjava algoritmov RLS in LMS

- RLS

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mathbf{k}[n]\epsilon[n]$$

$$\mathbf{k}[n] = \mathbf{R}^{-1}[n]\mathbf{x}[n]$$

- LMS

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + 2\mu\varepsilon[n]\mathbf{x}[n]$$